Der Anfangs-Gründe Aller Mathematischen Wiessenschaften

Letzter Theil/

Welcher
So wol die gemeine
Algebra/ als die Differential-
und Integral-Rechnung/ und einen Anhang
Von den vornehmsten
Mathematischen-Schrieften
In sich begreifet/
Und
Zu mehrerem Aufnehmen der Mathe-
matick so wol auf hohen als niedrie-
gen Schulen
aufgesetzet worden

Von
Christian Wolffen/
Mathem. Prof. P. O. auf der Königl.
Preußischen Friederichs-Universität
zu Halle.

Halle im Magdeburgischen An. MDCCX.
Zu finden in Rengerischer Buchhandlung.

Anfangs-Gründe
So wol der gemeinen
Algebra/
Als der
Differential-
Und
Integral-Rechnung.

Geneigter Leser.

DJe Algebra kan niemals zu viel gerühmet werden: deñ sie ist die Kunst/ durch welche man die Mathematischen Wahrheiten von sich selbst erfinden kan. Wenn ihr demnach die Anfangs-Gründe der Mathematischen Wiessenschaftē/ die ich euch in den drey vorhergehenden Theilen erklähret habe/ euch bekandt machet und die Algebra dabey studieret; so werdet ihr aus jenen durch diese vor euch selbst finden können/ was ihr sonst aus Büchern oder von anderen zu lernen von Nöthen hättet. Ja ihr werdet auch vieles erfinden können/ was andere vor Euch noch nicht gedacht haben. Mit einem Worte sie machet euch geschieckt/ daß/ wenn ihr nur gantz was geringes aus den Mathematischen Wiessenschaften gelernet/ ihr von euch selbst ein mehreres erfinden könnet zu der Zeit/ wenn ihr es

von Nöthen habet. Es ist aber keine vollkommenere Art zu studiren/ als wenn man nur ein weniges lernen darf und sich dabey doch auf alle vorkommende Fälle geschieckt machet. Ich sage aber noch mehr. Ihr treffet in der Algebra die aller vollkommenste Manier zu raisoniren an. Denn sie exprimiret die Begrieffe der Sachen durch Zeichen und verwandelt die Schlüsse/welche mit vielem Bedacht aus ihnen hergeleitet werden/ in eine leichte Manier die Zeichen mit einander zu verknüpfen und zu trennen. Dadurch erhält man zu gleich/ daß man öfters in einer Zeile mehr haben kan/ als in grossen Folianten nicht Raum finden würde. Durch das Anschauen weniger Zeichen werdet ihr öfters klüger/ als ihr durch vieler Jahre Arbeit nach der gemeinen Art zu lernen und zu dencken nicht werden könnet. In dieser Absicht pfleget man die Algebra den Giepfel menschlicher Wiessenschaften zu nennen/ und dieses von Rechtswegen. Ich habe demnach so wol die gemeine Algebra/ als die unvergleichliche Differential- und Integral-Rechnung des Herrn von Leibnitz dergestalt erklähren wollen/ daß nicht allein ihre Kunst-Grieffe unvermercket bey gebracht/ sondern auch die Haupt-Lehren von der so genannten Matheſi pura zu gleich mit erlernet/ ja von selbsten gefunden werden.

Anfangs-Gründe Der Algebra.

Der erste Theil/ Von den Anfangs-Gründen der gemeinen Algebra.

Die 1. Erklährung.

1.

DJe gemeine Algebra ist eine Wiessenschaft aus einigen gegebenen endlichen Grössen andere ihres gleichen zu finden/ von denen in Ansehung der gegebenen etwas bekand gemacht wird.

Die 1. Anmerckung.

2. Z. E. Ihr sollet zwey Zahlen finden/ die mit einander multipliciret eine gegebene Zahl 60/ hingegen zusammen addiret eine andere gegebene Zahl 12 bringen. Also werden euch gegeben zwey Zahlen und ihr sollet aus denselben zwey andere Zahlen finden/ von welchen euch bekand gemacht wird/ daß ihre Summe der kleineren/ ihr Product aber der grösseren von den gegebenen Zahlen gleich seyn sol. Die Algebra nun lehret euch eine allgemeine Regel finden/ nach welcher ihr alle Exempel von dieser Art rechnen könnet.

Zusatz.

3. Also ist die Algebra eine allgemeine Rechen-Kunst/ dadurch man nemlich alles/ was sich rechnen läst/ ausrechnen kan. (§. 1. Arithm.)

Die 2. Anmerckung.

4. Daher nennet auch der grosse Mathematicus in Engelland/ Herr Isaac Nevvton, seine Anweisung zur Algebra/ welche der berühmte Professor Mathematum Whiston zu Cambridge 1707 in 8 heraus gegeben/ Arithmeticam Universalem und wir könten die Algebra in unserer Teutschen Sprache mit gutem Fuge eine Allrechen-Kunst heissen.

Die 2. Erklährung.

5. Eine Grösse nennen wir alles dasjenige was sich vermehren und vermindern läst/ in so weit es sich vermehren und vermindern läst.

Der 1. Zusatz.

6. Also bestehet das Wesen einer Grösse in der Verhältnis zu einer andern ihres gleichen.

Die 1 Anmerckung.

7. Z.E. die Wärme nenne ich in so weit eine Grösse/ als ich dencken kan/ wie viel mal eine gegebene Wärme/ als die Wärme der Luft des heurigen Tages/ in einer andern gegebenen Wärme/ als in der Wärme der Luft des gestrigen Tages enthalten sey.

Der 2. Zusatz.

8. Und folgends sind die Grössen undeterminir-

minirte Zahlen/ da man nemlich noch keine gewisse Eines setzet (§. 6. 8 Arithm.)

Die 2. Anmerckung.

9. Nehmet z. E. eine gerade Linie von einer determinirten Länge. Setzet die Linie sey eingetheilet in 4 gleiche Theile. Wenn ihr einen von denselben zur Eins macht und die Länge der gantzen Linie mit ihm vergleichet: so heisset die Linie 4 und ihr betrachtet ihre Länge als eine Zahl. Setzet abermals die Linie sey eingetheilet in 5 gleiche Theile. Wenn ihr einen von denselben zur Eins macht und die Länge der gantzen Linie mit ihr vergleichet: so heisset die Linie 5 und ihr betrachtet ihre Länge abermals als eine Zahl. Wiederumb setzet die Linie sey eingetheilet in 13 gleiche Theile und vergleichet ihre gantze Länge mit einem solchen Theile; so heisset sie 13 und ihr betrachtet dieselbe als eine Zahl. Hieraus sehet ihr/ daß die Länge einer Linie durch unzehlich viel Zahlen/ grosse und kleine ausgesprochen werden kan/nach dem ihr nemlich einen grossen oder kleinen Theil derselben zur Eins annehmet. Wenn ihr nun keinen gewiessen Theil setzet/ mit welchem sie verglichen werden sol; sondern sie nur überhaupt betrachtet/ in so weit sie mit einer gewiessen Eins kan verglichen werden: so stellet ihr euch dieselbe als eine Grösse vor. Und daher kommt es/ daß durch die Algebra sehr allgemeine Wahrheiten erfunden werden: Da hingegen die Rechen-Kunst nur eintzele Exempel ausrechnet und allso stets mit eintzelen Fällen zu thun hat.

Der 3. Zusatz.

10. Alles/ was wir in der Welt antreffen und in uns selbst finden/ hat in allem dem/ was es würcklich ist und wovon sich etwas gedencken läst/ seine Schrancken und läst sich

dannenhero mit anderen Dingen von seiner Art vergleichen und darumb als etwas/ so vermehret oder vermindert werden kan/ das ist/ als eine Grösse (§. 5. 6) betrachten. Derowegen erstreckt sich die Albebra auf alle endliche Dinge und führet uns auf einen deutlichen Begrief von ihrer Endlichkeit.

Die 3. Anmerckung.

11. Es kan keine vollkommenere Erkäntnis gedacht noch verlanget werden/ als wenn man von der Endlichkeit der Dinge einen deutlichen Begrief erlanget: welches ich bey anderer Gelegenheit klahr und deutlich ausführen will. Daher dienet die Algebra zu einer vollkommenen Erkäntnis der Dinge zu gelangen/ und ohne dieselbe würde es in den meisten Fällen unmöglich seyn selbe zu überkommen.

Der 4. Zusatz.

12. Weil die Grössen undeterminirte Zahlen sind (§. 8)/ so kan man auch keine andere Veränderungen/ als wie mit Zahlen/ mit ihnen vornehmen/ und daher sie entweder zusammen addiren/ oder von einander subtrahiren/ oder durch einander multipliciren/ oder durch einander dividiren (§. 12. 15. 18. 21. 24 Arithm.)

Die 4. Anmerckung.

13. Gleichwie ihr aber mit Zahlen keine Rechnung vornehmen könnet/ ihr müsset euch vorher dieselben durch gewiesse Zeichen vorstellen: eben so wird in der Algebra erfordert/ daß ihr für die Grössen gewiesse Zeichen ersinnet.

Der

Der 1 willkührliche Satz.

14. **Man benenne die gegebenen Grössen jederzeit mit den ersten Buchstaben des Alphabets/ a, b, c, d u. s. w. die unbekandten aber/ welche man suchet/ mit den letzten x, y, z.**

Die 1. Anmerckung.

15. Wie die Grössen sich dem Verstande zuerkennen geben/ so müssen sie auch durch die Zeichen von einander unterschieden werden. Nun stellen sie sich in den Algebraischen Aufgaben jederzeit dem Verstande vor entweder als gegebene/ das ist/ bekandt gemachte/ oder als gesuchte/ das ist/ noch unbekandte Grössen: Derowegen muß man auch durch die Zeichen unserer Imagination oder Einbildungs-Kraft diesen Unterscheid klährlich vorstellen. Denn sonst wäre Gefahr/ daß man das unbekandte mit dem Bekandten leicht verwirrete und daher in Irrthum verfiele.

Die 2. Anmerckung.

16. Es wäre bey der Benennung der Grössen noch gar viel zu erinnern. Denn wenn sie geschickt und zum Erfinden dienlich seyn sol/ müssen die Zeichen alle gegebene relationes der bedenteten Dinge gegen einander andeuten. Z. E. Wenn eine von den unbekandten Grössen drey mal so groß ist als die andere/ und die kleinere heisset x; so nennet man die grössere lieber 3 x als y. Allein ich würde den Anfängern nicht dienen/ wenn ich sie mit vielen Regeln auf einmal überhäufete. Und halte es dannenhero für rathsamer/ daß ich es inskünftige lieber durch Exempel lehre/ und die Regeln nach und nach gleichsam unvermerckt und ohne Mühe beybringe.

Der

Der 2. Willkührliche Satz.

17. Das Zeichen der Addition ist +/ der Subtraction aber —. Jenes wird durch **Mehr**; dieses durch **Weniger** ausgesprochen.

Anmerckung.

18. Z. E. Die Summe zweyer Grössen a und b wird geschrieben a + b und ausgesprochen: a mehr b. Hingegen die Differentz zweyer Grössen wird geschrieben durch a — b und ausgesprochen: a weniger b. Als es bedeute a 7 Thaler/ b 8 Groschen: so bedeutet a + b 7 Thl + 8 gl das ist/ 7 Thl und 8 gl; hingegen a – b 7 Thl — 8 gl. das ist/ 7 Thl weniger 8 gl.

Der 3 willkührliche Satz.

19. Die Multiplication hat entweder gar kein Zeichen/ sondern man setzet die Buchstaben/ welche einander multipliciren/ ohne einiges Zeichen neben einander: oder man deutet sie durch ein comma (,) oder einen Punct (.) an. Insgemein brauchet man dieses Zeichen x.

Anmerckung.

20. Wenn a durch b multipliciret werden sol/ so schreibet das Product ab, oder a,b oder a. b, oder axb. Wir werden uns des letztern Zeichens niemals bedienen/ weil es leicht mit dem x vermenget wird. Doch haben wir es hiermit anführen sollen/ weil es in allen Büchern häufig vorkommt. Am meisten werden wir kein Zeichen brauchen: das comma und den Punct aber nur in gewiessen Fällen aus

be-

besonderen Ursachen/ die sich zu seiner Zeit in den Exempeln zeigen werden.

Der 4 willkührliche Satz.

21. Wenn eine grösse viele andere auf einmal multipliciret so schliesset man dieselben in eine parenthesin ( ) ein und setzet jene ohne einiges Zeichen vor oder hinter die parenthesin: oder man setzet zwieschen dieselben ein blosses comma.

Die 1. Anmerckung.

22. Das Product von $a + b - c$ in d, schreibet entweder allso $(a + b - c)\,d$, oder dergestalt $d\,(a + b - c)$, oder auch folgender massen $a + b - c, d$.

Die 2. Anmerckung.

23. Insgemein schreibet man dieses Product allso: $ab+-c \times d$/ oder auch $d \times \overline{a+b-c}$. Allein wir bleiben billig bey der Manier des Herrn von Leibnitz/ welche mit großem Vortheile in die Acta Eruditorum Lipsiensia eingeführet worden: denn man kan sich nicht so leicht verirren wie bey den gemeinen Zeichen/ und macht auch den Buchdruckern nicht so viel unnöthige Mühe/ erspaaret über dieses viel an dem Raume. Andere Vortheile wollen wir ietzt nicht gedencken/ die sich in folgendem zeigen werden.

Der 5. Willkührliche Satz.

24. Das Zeichen der Division sind zwey Puncte: / oder man schreibet die Buchstaben/ welche einander dividiren sollen/ wie in der Rechen-Kunst einen Bruch.

An-

Anmerckung.

25. Wenn a durch b dividiret werden sol/ so schreibet man den Qvotienten entweder $a:b$/ oder $\frac{a}{b}$ und spricht es beyderseits aus a durch b dividiret.

Der 6. willkührliche Satz.

26. **Wenn eine Grösse viel andere auf einmal dividiret/ oder viel andere eine dividiren/ so werden/ wie in der Multiplication die vielen in eine parenthesin ( ) eingeschlossen/ oder man kan auch an deren stat ein blosses Comma brauchen.**

Die 1. Anmerckung.

27. Wenn $a+b$ durch c dividiret werden sol / so schreibet den Qvotienten entweder $(a+b):c$ oder $a+b,:c$. Sollet ihr a durch $b+c$ dividieren / so ist der Qvotient $a:(b+c)$ oder $a:,b+c$. Wiederumb wenn ihr $a+b$ durch $c+d$ dividiret / so schreibet den Qvotienten $(a+b):(c+d)$ oder $a+b,:,c+d$.

Die 2. Anmerckung.

28. Nach der gemeinen Art schreibet ihr diese Qvotienten $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{b+c}$, $\frac{a+b}{c+d}$, oder auch $\overline{a+b}:c$, $a:\overline{b+c}$, $\overline{a+b}:\overline{c+d}$.

Die 6. Aufgabe.

29. **Einerley Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen zusammen zu addiren.**

Auflösung.

1. Wenn sie einerley Zeichen haben/ so zehlet sie wie in der Rechen-Kunst zusammen.

2. Sind

2. Sind aber die Zeichen verschieden/ so ziehet von der grösseren die kleinere ab / und setzet zu dem/ was überbleibet / das Zeichen der grösseren.

Exempel.

a † 2 b -- 3c --5d
3a--2b† 6c † 2 d

4a † 3c --- 3d

Beweiß.

Weil die Buchstaben undeterminirte Zahlen sind (§. 14); so könnet ihr einen ieden als Eines ansehen/ und demnach die Grössen/ welche durch einerley Buchstaben benennet werden/ als Dinge von gleicher Art zusammen zehlen (§. 8 Arithm.) Alle Grössen/ welche mit dem Zeichen -- bemercket werden/ fehlen und hingegen die das Zeichen † haben/ sind vorhanden. Wenn ich derowegen von beyder Art addiren sol/ so wird durch die letzteren der Mangel aufgehoben. Und dannenhero muß freylich die Addition in eine Substraction verkehret werden. W. Z. E.

Die 1. Anmerckung.

30. Die Grössen/ welche mit dem Zeichen — bemercket werden/ hat man nicht anders als Schulden anzusehen/ und hingegen die anderen mit dem Zeichen † als baares Geld. Und daher nennet man auch die ersten **weniger als nichts**/ weil man erst so viel weg geben muß/ als man schuldig ist/ ehe man nichts hat.

Die

Die 2. Anmerckung.

31. Damit euch die Rechnung mit Buchstaben deutlicher wird/ so bildet euch ein/ a bedeute 1 thl. b 1 gl. c 1 pf.

7a -- 9b † 5c	7 thl. -- 9 gl. † 5 pf.
3a † 5b -- 9c	3 thl. † 5 gl. -- 9 pf.
4a - 4b -- 4c	4 thl. - 4 gl. - 4 pf.

Die 2. Aufgabe.

32. **Einerley Grössen mit einerley oder verschiedenen Zeichen von einander zusubtrahiren.**

Auflösung.

1. Wenn einerley Zeichen sind/ und ihr sollet das kleinere von der grösseren abziehen / so verrichtet die Subtraction wie in Zifern (§ 47 Arithm.)
2. Sollet ihr aber die grössere von der kleineren abziehen/ so ziehet die kleinere von der grösseren ab/ und zu dem übriegen setzet das Zeichen --/ wenn die Grössen † haben. Hingegen † wenn sie -- haben.
3. Wenn die Zeichen verschieden sind/ so addiret die Grössen/ die ihr von einander abziehen sollet/ und zu der Summe setzet das Zeichen derjenigen Grösse/ von welcher die Subtraction geschehen sollte.

Exem-

Exempel.

8a - 5c † 9 d	8 thl. - 5 gl. † 9 pf
6a - 8c - 7 d	6 thl. - 8 gl. - 7 pf
2 a † 3c † 16 d	2 thl. † 3 gl. † 16 pf

9b † 15c - 7d † 8e - f
6b † 20c - 9d - 9e † 7f

3b - 5c † 2d † 17e - 8 f

Beweiß.

Weil ihr jeden Buchstaben als Eines ansehen könnet (§.8.14); so könnet ihr auch wie in Zahlen die Subtraction verrichten. Allein wenn ihr die grössere von der kleineren abziehet/ und sie haben das Zeichen †/ als 20 c von 15 c/ so nehmet ihr 20 c weg/ müsset aber wieder von oben die 15 c addiren/ und dannenhero fehlen nur noch so viel c als der Unterscheid zwieschen 20 und 15 ist/ nemlich 5. Hingegen wenn das Zeichen -- ist/ als wenn ihr -- 9d von -- 7 d abziehen sollet; so müsset ihr - 9d addiren/ weil ihr es zuviel abgezogen. Denn ihr solltet 20 c -- 9 d wegnehmen: ihr habt aber 20 c gantz weggenommen. Da nun oben 7 d fehlen/ so heben sich von den 9 d/ die ihr dazu addiret/ 7 auf und bleiben nur noch 2 d übrieg. Darumb dörfet ihr in diesen Fällen nur allzeit die kleinere von der grösseren abziehen/ und zu dem übriegen das wiedrige Zeichen setzen nemlich -- wenn ihr † habet/ und † wenn -- ist. Endlich wenn die Zeichen verschie-

den sind/ und ihr sollet Z. E. -9 e von †8 e abziehen; so wiesset ihr aus dem vorhergehenden/ daß die unteren 9 e addiret werden müssen/ weil ihr sie zuviel in den vorhergehenden abgezogen. Und demnach bekommt ihr † 17 e. Hingegen wenn ihr Z. E. †7 f von - f subtrahiren sollet; so fehlet euch oben schon ein f; Wenn ihr nun die 7 f unten auch noch wegnehmen sollet/ so fehlen euch zusammen 8 f. Daher habet ihr in beyden Fällen nur nöthig die Grössen zu addiren/ und zu der Summe das Zeichen zu setzen/ welches die Grösse hat/ davon die Subtraction geschiehet.

Die 3. Aufgabe.

33. Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen durcheinander zu multipliciren.

Auflösung.

Verrichtet die Multiplication/ wie in Zahlen (§. 52 Arithm.) nur mercket: daß einerley **Zeichen im Producte †/ verschiedene aber - geben.**

Exempel.

a † b - d	10 = 8 † 4 - 2
a - b - d	2 = 8 - 4 - 2
- ad - bd † dd	- 16 - 8 † 4
- ab - bb † bd	- 32 - 16 † 8
aa † ab - ad	64 † 32 - 16
aa - bb - 2 ad † dd	68 - 48 = 20

Be-

Beweiß.

Wenn ihr † durch † multipliciret / so ist klahr/ daß das Product auch † haben muß. Jngleichen ist nicht schweer zu begreiffen / daß in dem Producte das Zeichen -- seyn muß/ wenn ihr † durch -- multipliciret / weil ihr einen Mangel oder eine Schuld etliche mal nehmet. Allein wenn -- durch -- multipliciret wird/ scheinet es nicht gleich klahr zu seyn/ warumb in dem Producte † ist. Mercket demnach/ daß wenn ihr 3 -- 2 durch -2 multipliciren sollet/ ihr den Defect - 2 so viel mal nehmen sollet/ als 3 -- 2 Einheiten hat; das ist/ 1 mal. Da ihr nun anfangs 3 mit -2 multipliciret/ so nehmet ihr den Defect 3 mal / und demnach 2 mal zu viel. Derowegen müsset ihr ihn noch zwey mal dazu wieder addiren. Und also giebet -- 2 mit -- 2 zum Producte † 4 W. Z. E.

Zusatz.

34. Wenn ihr -- a mit † b multipliciret / so kommet -- ab heraus. Derowegen wenn ihr -- ab durch † b dividiret/ muß -- a heraus kommen. Dividiret ihr aber -- ab durch -- a/ so muß † b heraus kommen. Demnach ist klahr / daß auch in der Division die Regel gielt: **Einerley Zeichen geben im Qvotienten †/ verschiedene aber --.**

Die 4. Aufgabe.

35. **Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen durch einander zu dividiren.**

Auflösung.

Wenn eine gegebene Grösse durch die andere sich würcklich dividiren läßet; so verfahret wie in Zahlen (§. 56)/ nur daß ihr die Regel von Veränderungen der Zeichen wohl in acht nehmet (§. 34).

Kan aber die Division nicht würcklich geschehen/ so bleibet es bey dem/ was oben (§. 24 & seqq.) gesaget worden.

Exempel.

aa – bb -- 2ad † dd (a † b - d
a - b - d) aa -- ab -- ad

† ab — bb -- ad † dd
a -- b -- d) † ab — bb -- bd

† bd -- ad † dd
a -- b -- d) - ad † bd † dd

0

Anmerckung.

36. Weil die Buchstaben nicht wie die Zahlen eine Bedeutung von der Stelle haben/ in welcher sie stehen; so dörfet ihr euch auch hier an keine Ordnung binden/ sondern möget den Qvotienten suchen/ in welchem Gliede ihr ihn findet: welches auch in dem Subtrahiren des Productes aus dem Divisore in den Qvotienten sta findet.

Die 3. Erklährung.

37. **Wenn man eine Grösse durch sich selbst multipliciret/ so heisset das Product/ welches heraus kommet/ die andere Potentz oder Dignität derselben Grös-**

Grösse. Multipliciret ihr die andere Dignität noch einmal durch die erste/ so kommet die dritte Potentz/ oder Dignität heraus. Multipliciret ihr ferner die dritte durch die erste/ so kommet die vierdte Potentz oder Dignität heraus. Multipliciret ihr die vierdte durch die erste/ so kommet die fünfte Potentz oder Dignität heraus/ u. s. W.

Der 7. willkührliche Satz.

38. Den Grad der Potentz oder Dignität einer Grösse deutet durch eine kleine Ziffer/ oder/ wenn er nicht determiniret ist/ durch einen kleinen Buchstaben an/ den ihr oben zur Rechten an denjenigen Buchstaben setzet/ wodurch die Grösse benennet wird. Z. E. die andere/ dritte/ vierdte. 2c. Dignität von X ist/ X^2/ X^3/ X^4/ 2c. X^m. Diese Zahlen aber werden die Exponenten der Dignitäten genennet.

Der 1. Zusatz

39. Dannenhero wenn ihr eine Dignität durch eine andere multipliciren sollet/ so dörfet ihr nur ihre Exponenten zusammen addiren.

Exempel.

x^3	y^m	$x^m + x^n$
x^4	y^n	$x^r \quad x^n$
x^7	y^{m+n}	$x^{m+r} x^{2n}$

Der 2. Zusatz.

40. Hingegen wenn ihr die Dignität einer Grösse durch eine andere Dignität derselben dividiren sollet; so dörfet ihr nur ihre Exponenten voneinander subtrahiren.

Exempel.

$$\frac{x^7}{x^4} = x^3 \qquad \frac{x^7}{x^3} = x^4 \qquad \frac{y^{m+n}}{y^n} = y^m \qquad \frac{y^m}{y^n} = y^{m-n}$$

Der 3. Zusatz.

41. Endlich wenn ihr die Dignität einer Größe zu einer anderen Dignität erheben sollet/ so dörfet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponenten der anderen multipliciren. Z. E. Ihr sollet x^3 zu der 4 Dignität erheben: so multipliciret 3 durch 4/ und nehmet x^{12} vor die gesuchte Dignität an.

Anmerckung.

42. Die Ursache ist leicht zu errathen. Denn ihr sollet den Exponenten 3 vier mal zu sich selbst addiren (§. 37. 39) Dieses aber geschiehet / wenn ihr ihn durch 4 multipliciret (§. 23. Arithm.)

Der 4. Zusatz.

43. Folgends wenn ihr aus einer gegebenen Dignität eine verlangte Wurtzel ziehen sollet / das ist / diejenige Grösse finden/ welche zu einer gewießen Dignität erhoben worden (§. 83. 84. Arithm. & §. 37. Algebr.); so dörfet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponenten der Wurtzel dividiren. Z. E.

Die

die Wurtzel der vierdten Dignität aus x^{12} ist x^3 die Wurtzel m aus x^n ist $x^{n:m}$.

Anmerckung.

44. Mercket wohl diese Art der Wurtzeln zu zeichnen/ denn ihr werdet ins künftige großen Vortheil davon haben.

Der 8. Willkührliche Satz.

45. **Wenn ihr die Wurtzel aus einer Grösse ziehen sollet/ dergleichen sie nicht hat/ so setzet folgendes Wurtzel-Zeichen vor sie und über dasselbe den gehörigen Exponenten der Wurtzel: in der Quadrat-Wurtzel aber könnet ihr den Exponenten weglassen.** Also schreibet ihr die Cubic-Wurtzel von x/ $\sqrt[3]{x}$; hingegen die Wurtzel der fünften Dignität von x schreibet ihr $\sqrt[5]{x}$.

Zusatz.

46. Weil $\sqrt{x} = x^{1:2}$/ $\sqrt[3]{x^2} = x^{2:3}$/ $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 43) so könnet ihr iederzeit eine Formul in die Stelle der anderen setzen/ nachdem ihr von dieser oder von jener einen Vortheil haben könnet.

Die 4. Erklährung.

47. **Dergleichen Grössen/ daraus die verlangete Wurtzel nicht gnau gezogen werden kan/ werden Irrational-Grössen oder/ wenn es Zahlen sind/ Irrational-Zahlen genennet.** dergleichen sind $\sqrt{2}$/ $\sqrt[3]{4}$/ $\sqrt[5]{6}$

Anmerckung.

48. Die Irrational-Grössen können entweder eine Benennung haben, als $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{5}$, oder verschiede-ne als $\sqrt[4]{3}$ und $\sqrt[5]{6}$.

Die 5. Aufgabe.

49. **Irrational Grössen von verschiedener Benennung zu einer Benennung zu bringen.**

Auflösung.

Es seyn die gegebenen Irrational-Grössen $x^{n:m}$ und $y^{r:s}$.

Weil der Unterscheid der Benennung in dem Unterscheide der Exponenten $n:m$ und $r:s$ bestehet, hingegen man diese Brüche in andere gleichgültige verwandeln kan, die einerley Benennung haben (§. 74 Arithm.) so ist weiter nichts vonnöthen als daß ihr die Exponenten unter einerley Benennung bringet, und die dadurch gefundenen Brüche in die Stelle der Exponenten schreibet. So werdet ihr finden, daß $x^{n:m} + y^{r:s} = x^{ns:ms} + y^{mr:ms} = \sqrt[ms]{x^{ns}} + \sqrt[ms]{y^{mr}}$.

Anmerckung.

50. Eben dieser Methode könnet ihr euch in den Irrational-Zahlen bedienen. Z. E. Ihr sollet $\sqrt[3]{5}$ und $\sqrt{3}$ unter eine Benennung bringen. Weil $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ und $\sqrt{3} = 3^{1:2}$, so findet ihr $5^{1:3} + 3^{1:2} = 5^{2:6} + 3^{3:6} = \sqrt[6]{5^2} + \sqrt[6]{3^3} =$ (wenn ihr die Grössen un-

ter

ter dem Wurtzel-Zeichen würcklich zu ihrer Dignität erhebet) $\sqrt[6]{25} + \sqrt[6]{27}$.

Die 6. Aufgabe.

51. Irrational-Grössen auf eine schlechtere Art auszudrucken.

Auflösung.

Ihr sollet $\sqrt[m]{a^n x^m}$ auf eine andere Art ausdrucken. Setzet

$$\sqrt[m]{a^n x^m} = y \qquad \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8.2} = x$$

so ist

$$a^n x^m = y^m \qquad 8.2 = x^3$$

$$a^n = y^m : x^m \qquad 2 = x^3 : 8$$

$$\sqrt[m]{a^n} = y : x \qquad \sqrt[3]{2} = x : 2$$

$$x\sqrt[m]{a^n} = y \qquad 2\sqrt[3]{2} = x$$

Regel.

1. Dividiret die Grösse unter dem Wurtzel-Zeichen durch eine Dignität von dem Grade, der einerley Exponenten mit der Wurtzel hat, als durch einen Cubum wenn die Irrational-Grösse eine Cubic-Wurtzel ist. Denn wenn dergleichen Division nicht angehet, so könnet ihr auch die Irrational-Grösse nicht schlechter ausdrucken.
2. Den Qvotienten lasset unter dem Wurtzel-Zeichen stehen.

3. Vor das Wurtzel-Zeichen aber setzet die Wurtzel der Dignität / dadurch ihr dividiret habt.

So ist geschehen / was man verlangete.

Exempel.

$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$. Ingleichen $\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}$. Wiederumb $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{3}$.

Der 1. Zusatz.

52. Wenn ihr Irrational-Grössen von einerley Art solcher gestalt reduciret / und es bleibet unter dem Wurtzel-Zeichen einerley Grösse stehen; so verhalten sich dieselbe gegen einander wie die Rational-Grössen vor dem Wurtzel-Zeichen. Z. E. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$. Derowegen ist $2\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 2 : 3$ (§. 68. Arithm.)

Der 2. Zusatz.

53. Derowegen könnet ihr durch gegenwärtige Aufgabe finden / ob zwey Irrational-Grössen eine Verhältnis gegen einander haben / die sich durch Rational-Grössen ausdrucken lässet.

Der 3. Zusatz.

54. Weil ihr in solcher Gestalt reducirten Rational-Grössen den Theil / welcher irrational bleibet für den Nahmen der Einheit mit Recht haltet (§. 5 & seqq. Arithm.) so könnet ihr die Summe oder den Unterscheid

scheid der Irrational-Grössen finden/ die unter dem Wurtzel-Zeichen einerley Grössen haben und von einerley Art sind / wenn ihr die Rational-Grössen vor dem Wurtzel-Zeichen zu sammen addiret oder von einander subtrahiret. So werdet ihr finden/ daß $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ und $\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Ingleichen $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3.8} + \sqrt[3]{3.27} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{23} = 5\sqrt[3]{3}$.

Der 4. Zusatz.

55. Es ist aus der Auflösung der Aufgabe zugleich klahr/ wie ihr verfahren müsset/ wenn ihr die Grössen/ die zum Theil rational/ zum Theil irrational sind/ gantz irrational machen sollet. Nemlich ihr müsset die Grösse vor dem Wurtzel-Zeichen zu der Dignität erheben/ welche der Exponente über dem Wurtzel-Zeichen andeutet/ und durch selbige die Grösse unter dem Wurtzel-Zeichen multipliciren. So werdet ihr finden / daß $5\sqrt{2} = \sqrt{2.25} = \sqrt{50}$ und $5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3.5^3} = \sqrt[3]{3.125} = \sqrt[3]{375}$.

Die 1. Anmerckung.

56. Damit ihr erfahret/ ob eine vorgegebene Zahl sich durch eine Dignität von einem gegebenen Grade dividiren lässet oder nicht; so dörfet ihr nur dieselbe in diejenigen Zahlen resolviren/ durch deren Multiplication sie entstehet. Dieses aber geschiehet/ wenn ihr sie mit den eintzelen Zahlen zu dividiren

ren anfanget. Z. E. Ihr sollet auf solche Weise 368 resolviren/ so findet ihr:

2.	184
4.	92
8.	46
16.	23

Wenn ihr über 10 kommen seyd/ so sehet ihr jederzeit/ daß die vorgegebene Zahl sich mit keiner dividiren lässet/ die nicht durch Multiplication der vorher gefundenen Einer entstanden.

Die 2. Anmerckung.

57. Wem die Irrational-Rechnungen anfangs verdrüßlich fallen/ der kan sie so lange überschlagen biß sie unten vorkommen. Er hüte sich aber mit Fleiß/ daß er nicht nach hiesiger Mode für unnütze Grillen halte/ wovon er den Nutzen nicht bald sehen kan. Ihr werdet im folgenden erfahren/ daß ich niemals eine Lehre vortrage/ die nicht ihren gewießen Nutzen hat.

Die 3. Anmerckung.

58. Sonst mercket noch den Kunstgrief/ dessen wir uns in Auflösung gegenwärtiger Aufgabe bedienet. Weil wir mit Rational-Grössen umbgehen können/ haben wir die Irrational-Grössen auf Rational-Grössen reduciret umb eine Regel zu finden/ wie wir dieselben tractiren können. Diesen Kunstgrief werden wir mehr brauchen und die Ausübung der Algebra wird euch geschieckt machen/ auch in andern vorkommenden Fällen die schweereren auf leichtere zu reduciren: wovon ihr unter andern ein Exempel in der Geometrie gehabt (§. 105 Geom.)

Die 7. Aufgabe.

59. **Eine Irrational-Grösse durch eine andere von einerley Art zu multipliciren.**

Auf-

Auflösung.

Ihr sollet $\sqrt[m]{a^n}$ durch $\sqrt[m]{b^r}$ multipliciren. Setzet

$$\sqrt[m]{a^n} = x \qquad \sqrt[m]{b^r} = y \ (\S.\ 59)$$

So ist $a^n = x^m \qquad b^r = y^m$

$$b^r = y^m$$

$$a^n b^r = x^m y^m \ (\S.32.\ \text{Arithm.})$$

Folgends $\sqrt[m]{a^n b^r} = xy$.

Regel.

1. Multipliciret die Grössen unter dem Wurtzel-Zeichen (a^n und b^r) durch einander.
2. Vor das Product setzet das Wurtzel-Zeichen mit seinem Exponenten ($\sqrt[m]{\ }$).

So werdet ihr finden/ daß $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$/ und $\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$.

Zusatz.

60. Wenn ihr allso eine Irrational-Zahl durch eine andere Irrational-Zahl dividiren sollet/ so dörfet ihr nur die Zahlen unter dem Wurtzel-Zeichen durch einander dividiren.

So werdet ihr finden/ daß $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{5}$/ $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7}$ und $\sqrt{6} : \sqrt{3} = \sqrt{2}$.

Die 8. Aufgabe.

61. Eine Aufgabe Algebraisch aufzulösen:

Auflösung.

1. Unterscheidet mit Fleiß die bekandten Grössen von den unbekandten und benennet jene mit den ersten/ diese mit den letzten Buchstaben des Alphabets (§. 14). Wenn die Benennung geschehen/ so

2. Suchet eine Gleichung/ daß ihr nemlich eine Sache mit zweyerley Nahmen beleget: den so müssen die beyden Werthe einander gleich seyn (§. 27 Arithm.) Ihr müsset aber so viel Gleichungen finden/ als ihr unbekandte Grössen habet. Wenn es nicht angehet / so ist es ein Zeichen/ daß ihr die eine unbekandte Größe so groß annehmen könnet als ihr wollet. Und pfleget man dergleichen Aufgaben **Undeterminirte Aufgaben** zunennen. Es sind aber die Gleichungen entweder in der Aufgabe selbst angedeutet/ oder ihr müsset sie aus den Umbständen derselben durch Hülfe derjenigen Lehrsätze suchen/ welche von der Gleichheit handeln.

3. Wenn

3. Wenn in den Gleichungen bekandte und unbekandte Grössen mit einander vermenget sind/ so müsset ihr dieselben dergestalt reduciren/ daß auf einer Seite lauter bekandte auf der anderen aber nur eine unbekandte stehen bleibet: welches geschiehet/ wenn ihr die Grössen/ welche subtrahiret sind/ durch addiren; welche addiret sind/ durch subtrahiren; welche andere multipliciren/ durch dividiren; welche andere dividiren/ durch multipliciren wegbringet oder auch die Wurtzeln zu ihren Dignitäten erhebet/ oder aus den Dignitäten die gehörigen Wurtzeln ausziehet: damit ihr immer eine Gleichheit erhaltet (§. 30. 31. 32. 33. Arithm.)

Anmerckung.

62. Unerachtet die Reduction der gefundenen Gleichung sehr ofte auf beschriebene Weise geschehen kan; so gehet es doch nicht in allen Fällen an. Wir wollen aber erst diese Regeln uns durch Exempel recht bekand machen/ ehe wir zu anderen schreiten: Denn die Algebra lernet man nicht so wol durch Regeln/ als durch Exempel.

Die 9. Aufgabe.

63. **Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen und ihrem Unterscheide die Grössen selber zu finden.**

Auflösung.

Es sey die Sum̃e $= a$ die kleine Grösse $= x$

der

der Unterscheid $= b$ die grosse $= y$

So ist/

$x + y = a$ (§.15 Arithm.) $y - x = b$ (§.18. Arithm.)

$$\begin{array}{c} x \quad x \\ \hline y = a - x \end{array} \qquad \begin{array}{c} x \quad x \\ \hline y = b + x \end{array}$$

demnach

$$\begin{array}{c} a - x = b + x \\ x \qquad\quad x \\ \hline a = b + 2x \\ b \quad b \\ \hline a - b = 2x \\ \hline a - b = x \\ \hline 2 \end{array}$$

Regel.

Ziehet den Unterscheid der beyden Grössen (b) von der Summe (a) ab. Den Rest dividiret durch zwey; so ist der Qvotient die kleine Grösse (x).

Z. E. Es sey $a = 30$/ $b = 8$/ so ist $(a - b) : 2 = (30 - 8) : 2 = 22 : 2 = 11$.

Anmerckung.

64. Ihr könnet allzeit aus der letzten Vergleichung eine Regel machen/ dadurch die Aufgabe in allen vorkommenden Fällen aufgelöset werden kan/

Wenn

wenn ihr vor die Buchstaben die Nahmen der Sachen setzet / die sie bedeuten / und an stat der Zeichen die Rechnungs-Art benennet / die sie andeuten: allein der Kürtze halber werde ich ins künftige keine Regel hersetzen / wenn es nicht besondere Umbstände erforderen. Und dieses thue ich umb so viel lieber / weil man die Exempel in Zahlen viel hurtiger auflösen kan / wenn man die Zifern in die Stelle der Buchstaben setzet / als wenn man nach der Regel verfähret.

Die 10. Aufgabe.

65. Eine Zahl zu finden / deren Helfte $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ zusammen umb 1 grösser sind als die Zahl selbst.

Auflösung.

Es sey die gesuchte Zahl $= x$ / so ist

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x = x + 1$$

das ist $(12x + 8x + 6x) : 24 = \frac{26}{24}x = x + 1$ (§. 74. Arithm.)

$$24 \overline{}$$

$$26x = 24x + 24$$

$$24x \qquad 24x$$

$$2x = 24$$

$$2 \overline{}$$

$$x = 12$$

Probe. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 6 + 4 + 3 = 13.$

Die 11. Aufgabe.

66. Aus der gegebenen Sum̄e zweyer Zahlen und dem Producte einer Zahl in die andere / die Zahlen selber zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ die halbe Diffe-

-rentz $= x$ das Product $= b$ so ist die grosse

Zahl $\frac{1}{2}a + x$ } §. 6.
die kleine $\frac{1}{2}a - x$ }

Und allso $\frac{1}{4}aa - xx = b$

$$\frac{1}{4}aa = b + xx$$

$$\frac{1}{4}aa - b = xx$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = x$$

Es sey $a = 14$, $b = 48$, so ist $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = \sqrt{(49 - 48)} = 1$, folgends die große Zahl $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1 = 8$ und $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$.

Anmerckung.

67. Es ist an der Benennung öfters viel gelegen. Denn wenn ihr in gegenwärtiger Aufgabe die grosse Zahl x, die kleine y geneunet hättet; würdet ihr auf eine Gleichung kommen seyn, die ihr noch nicht aufzulösen vermögend seyd.

Die 12. Aufgabe.

68. **Es wird gegeben die Summe gleicher Dignitäten zweyer Grössen, und der Unterscheid selbiger Dignitäten, ihr sollet die Größen selbst finden.**

Auflösung.

Es sey die Sume $= a$ die kleine Größe $= x$
Der Unterscheid $= b$ die große $= y$

so ist,

$x^m + y^m = a$ $y^m - x^m = b$

$y^m = a - x^m$ $y^m = b + x^m$

Fol-

Folgends

$$a - x^m = b + x^m$$

$$a = b + 2x^m$$

$$a - b = 2x^m$$

$$(a-b):2 = x^{2m}$$

$$\sqrt[2m]{(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)} = x$$

Es sey $m = 2$ / $a = 97$ / $b = 65$ / so ist $x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)} = \sqrt{(48\tfrac{1}{2} - 32\tfrac{1}{2})} = \sqrt{(16)} = 4$ und $y = \sqrt{(b + x^2)} = \sqrt{(65 + 16)} = \sqrt{(81)} = 9$.

Die 13. Aufgabe.

69. Zwey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden / daß das Product einer jeden in die Qvadrat-Wurtzel der andern einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey das eine Product $= a$ die eine Zahl $= x$
das andere $= b$ die andere $= y$

So ist $x\sqrt{y} = a$ $\quad y\sqrt{x} = b$

$$x^2 y = a^2 \qquad y^2 x = b^2$$

$$x = b^2 : y^2$$

$$x^2 = b^4 : y^4$$

Wenn ihr den Werth von x^2 in die erste Gleichung zur Lincken setzet / so bekommet ihr

$$b^4 y : y^4 = b^2 : y^3 = a^2$$

$$b^4 = a^2 y^3$$

$$b^4 : a^2 = y^3$$

$$\sqrt[3]{(b^4 : a^2)} = y$$

Es sey $a = 18$, $b = 12$, so ist $y = \sqrt[3]{(b^4 : a^2)}$ $= \sqrt[3]{(20736 : 324)} = \sqrt[3]{(64)} = 4$.

Die 14. Aufgabe.

70. Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen und der Differentz ihrer Qvadrate die beyde Grössen zu finden.

Auflösung.

Es sey die Sume $= a$ die halbe Diefferentz
die Differentz $= b$ der Grössen $= y$
So ist die eine Grösse $\frac{1}{2} a + y$
Die andere $\frac{1}{2} a - y$
Das Qvadrat der ersten $\frac{1}{4} aa + ay + yy$
Das Qvadrat der andern $\frac{1}{4} aa - ay + yy$

Die Differentz $b = 2ay$

$$\overline{} 2a$$

folgends $b : 2a = y$

Es sey $b = 40$, $a = 10$, so ist $y = 40 : 20 = 2$; folgends die eine Zahl $\frac{1}{2} a + y = 5 + 2 = 7$, die andere $\frac{1}{2} a - y = 5 - 2 = 3$.

Die 15. Aufgabe.

71. Aus der gegebenen Summe zweyer Größen und der Summe ihrer Qvadrate die beyden Größen zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste Sume $= a$ die eine Grösse $\frac{1}{2}a + y$

Die andere $= b$ die andere $\frac{1}{2}a - y$

So ist das Qvadrat der ersten $\frac{1}{4}aa + ay + yy$

der anderen $\frac{1}{4}aa - ay + yy$

Die Summe $b = \frac{1}{2}aa + 2yy$

Folgends $b - \frac{1}{2}aa = yy$

$\surd(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa) = y$

Es sey $a = 10$, $b = 58$, so ist $\surd(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa) = \surd(29 - 25) = \surd 4 = 2$, folgends $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ und $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Die 16. Aufgabe.

72. Aus dem gegebenen Producte aus der Summe der Qvadrate zweyer Größen in die kleine und der Summe aus dem Qvadrate ihrer Differentz in das doppelte Product derselben Grössen die beyden Grössen zu finden.

Auflösung.

Es sey die eine Grösse $= x$ das Product $= a$

Die kleine $= y$ Die Sume $= b$

So ist die Differentz $= x - y$

Ihr Qvadrat $= x^2 - 2xy + yy$

das doppelte Product $= 2xy$

die Summa $= x^2 + yy$

Derowegen ist

$x^2 + y^2 = b$ $\qquad$ $x^2 y + y^3 = a$

$x^2 = b - y^2$

Setzet den Werth von x^2 in die Gleichung zur Rechten / so habet ihr

$by - y^3 + y^3 = by = a$

folgends $\quad y = b : a$

Es sey $a = 910$ / $b = 130$ / so ist $b ; a = 910 : 130 = 7$ und $x = \sqrt{(130 - 49)} = \sqrt{81} = 9$.

Die 17. Aufgabe.

73. Zwey Zahlen zu finden / deren Product einer gegebenen Zahl gleich ist / das Qvadrat aber der Summe zu dem Qvadrate der Differentz beyder Zahlen eine gegebene Verhältnis hat.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$ die eine Zahl $x - y$ die gegebene Verhältnis $= b : c$ die andere $x + y$

So ist

$xx - yy = a$ $\qquad$ $b : c = 4x^2 : 4y^2$

$xx = a + y^2$ $\qquad$ $4by^2 = 4cx^2$

$by^2 : c = x^2$

Fol-

Folgends

$$a + y^2 = by^2 : c$$

$$ac + cy^2 = by^2$$

$$ac = by^2 - cy^2$$

$$ac : (b-c) = y^2$$

$$\sqrt{ac} : \sqrt{(b-c)} = y$$

Es sey $a = 96$, $b : c = 25 : 1$, so ist $y = \sqrt{96} : \sqrt{25 - 1} = \sqrt{4} = 2$; und $x = \sqrt{(96 + 4)} = \sqrt{100} = 10$; folgends $x + y = 10 + 2 = 12$ und $x - y = 10 - 2 = 8$.

Die 5. Erklährung.

74. Wenn die Wurtzel einer Dignität oder Potentz aus zwey Theilen bestehet, nennet man sie eine Binomische Wurtzel, als $a + b$. Bestehet sie aus drey Theilen, als $a + b + c$; so heisset sie eine Trinomische Wurtzel: Wenn sie aus vier Theilen bestehet, eine Qvadrinomische Wurtzel u. s. w. überhaupt aber nennet man sie eine Polynomische Wurtzel, wenn sie aus mehr als zwey Theilen bestehet.

Die 18. Aufgabe.

75. Die Natur des Qvadrates oder

der anderen Dignität einer Binomischen Wurtzel zu finden.

Auflösung.

Ihr verlanget zu wießen/ wie das Qvadrat einer Binomischen Wurtzel entstehen kan/ (§. 4 Method. Mathem.) Multipliciret demnach die Binomische Wurtzel $a + b$ durch sich selbst/ so wird das Product zeigen/ aus was für Theilen das Qvadrat zusammen gesetzet werde/ und wie diese Theile des Qvadrates aus den Theilen der Wurtzel entstehen.

$$\begin{array}{rrr} & a & + b \\ & a & + b \\ \hline & + ab & + b^2 \\ a^2 & + ab & \\ \hline a^2 & + 2ab & + b^2 \end{array}$$

Qvadrat der Binomisch. Wurtzel.

Lehrsatz.

Das Qvadrat der Binomischen Wurtzel begreiffet in sich die Qvadrate der beyden Theile (a^2 und b^2) und ein Product ($2ab$) aus dem einen Theile zwey mal genommen ($2a$) in den anderen (b).

Anmerckung.

76. Ihr habet hier auf eine sehr leichtere Art den anderen Lehrsatz der Rechen-Kunst (§. 86. Arithm.) gefunden/ daraus wir die Auszziehung der Qvadrat-Wurtzel (§. 90. Arithm.) hergeleitet. Wenn ihr aber

ber dieselben Regeln vergeßen hättet/ könte euch dieses allgemeine Exempel $a^2 + 2ab + b^2$ an stat derselben dienen. Denn ihr sehet/ wenn ihr in der ersten Classe zur Lincken das darinnen befindliche Qvadrat a^2 abziehet/ ihr den ersten Theil der Wurtzel a habet. Wollet ihr nun den anderen finden/ so müsset ihr mit $2a$/ das ist/ mit dem gefundenen Qvotienten zwey mal genommen/ die folgende Zahl $2ab$ dividiren/ und hernach nicht allein das Product aus dem Divisore $2a$ in den neuen Qvotienten b/ sondern auch das Qvadrat des neuen Qvotienten b^2 subtrahiren.

Zusatz.

77. Setzet $a = a + b$ und $b = c$/ so kommet für das Qvadrat der Trinomischen Wurtzel $(a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$. Und allso müsset ihr zu dem Binomischen Qvadrate noch das Product aus der Summe der beyden Theile der Binomischen Wurtzel zwey mal genommen in den dritten Theil und das Qvadrat des dritten Theiles addiren. Setzet $a = a + b + c$/ und $b = d$/ so kommet für das Qvadrat der Trinomischen Wurtzel $(a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2$. Derowegen müsset ihr zu dem Qvadrate der Trinomischen Wurtzel noch das Product aus der Summe der ersten drey Theile viermal genommen in den vierdten Theil und das Qvadrat des vierdten Theiles addiren. Solcher gestalt sehet ihr/ daß ihr nach der Binomischen Formul auch das Qvadrat einer jeden Polynomischen Wurtzel finden/ ingleichen aus einer gegebenen Zahl eine jede Polynomische

Wurtzel ziehen könnet. Den $(a + b + c + d + e \; \&c.)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 + 2(a+b+c+d)e + e^2$ u. s. w. unendlich fort.

Die 6. Erklährung.

78. **Eine unreine Qvadratische Gleichung** (Æquatio quadratica affecta) wird genennet / in welcher $x^2 \mp a x = \pm b^2$.

Die 19. Aufgabe.

79. **Eine unreine Qvadratische Gleichung aufzulösen.**

Auflösung.

Weil $x^2 . a x = . b^2$ / so nehmet x für den einen Theil einer Binomischen Wurtzel an / so wird a / die bekandte Grösse des anderen Gliedes / der andere Theil der Wurtzel zweymal genommen und allso $\frac{1}{2} a$ der andere Theil der Wurtzel seyn: folgends fehlet zu einem vollkommenen Qvadrate das Qvadrat von $\frac{1}{2} a$ / nemlich $\frac{1}{4} aa$. Wenn ihr nun solches beyderseits addiret; so lässet sich die Qvadrat-Wurtzel ausziehen und die gegebene Gleichung völlig reduciren.

$$x^2 . ax = . b^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2$$

$$x^2 . ax . \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 . b^2$$

$$x . \tfrac{1}{2}a = V(\tfrac{1}{4}a^2 . b^2)$$

$$x = . \tfrac{1}{2}a . V(\tfrac{1}{4}a^2 . b^2)$$

Anmerckung.

80. Ich habe an stat der Zeichen + und — nur einen Punct gesetzet/ damit es nicht nöthig wäre viele Fälle von einander zu unterscheiden. Den Nutzen dieser Regel werdet ihr inskünftige überflüßig sehen. Jetzt vergnüget mich dieselbe durch die beyden folgenden Aufgaben zu erläutern.

Die 20. Aufgabe.

81. **Zwey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden/ daß ihr Product/ ihre Summe und die Differentz ihrer Qvadrate einander gleich sind.**

Auflösung.

Es sey die grosse Zahl $= x$
die keine $= y$ / so ist

$x^2 - y^2 = xy \qquad xy = x + y$

$$xy - y = x$$

$$y = x : (x + 1)$$

Wenn ihr den Werth y in der ersten Gleichung an seine Stelle setzet/ so bekommet ihr

x^2

$$x^2 - \frac{x^2}{x^2-2x+1} = \frac{x^2}{x-1}$$

$$\overline{\qquad\qquad} \times (x^2-2x+1)$$

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 = x^3 - x^2$$

$$x^4 - 3x^3 = -x^2$$

$$\overline{\qquad\qquad} \div x^2$$

$$x^2 - 3x = -1$$

$$\tfrac{9}{4} \qquad \tfrac{9}{4}\ (\S.\ 79)$$

$$x^2 - 3x + \tfrac{9}{4} = \tfrac{9}{4} - 1 = \tfrac{5}{4}$$

$$x - \tfrac{3}{2} = \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$

$$x = \tfrac{3}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}} = 1\tfrac{1}{2} + \sqrt{1\tfrac{1}{4}}$$

Ferner weil $xy - x = y$, so ist $x = y : (y-1)$. Wenn ihr diesen Werth in der ersten Gleichung in die Stelle x setzet, so bekommet ihr

$$y^2 - \frac{y^2}{y^2-2y+1} = \frac{y^2}{y-1}$$

und wenn ihr die Reduction wie vorhin anstellet, so findet ihr endlich $y = 1\tfrac{1}{2} - \sqrt{1\tfrac{1}{4}}$.

Die 21. Aufgabe.

82. **Aus dem gegebenen Producte zweyer Grössen und ihrer Differentz die Grössen selber zu finden.**

Auflösung.

Es sey das Product $= a$ die eine Grösse $= x$
die Differentz $= b$ die andere $= y$

So ist/

$$a = xy \qquad b = x - y$$

$$a : y = x \qquad b + y = x$$

Folgends $a : y = b + y$

$$a = by + y^2$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 \qquad \tfrac{1}{4}b^2 \text{ (§. 79)}$$

$$a + \tfrac{1}{4}b^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + by + y^2$$

$$\sqrt{(a + \tfrac{1}{4}b^2)} = \tfrac{1}{2}b + y$$

$$\sqrt{(a + \tfrac{1}{4}b^2)} - \tfrac{1}{2}b = y$$

Es sey $a = 40$/ $b = 3$/ so ist $y = \sqrt{(40 + \tfrac{9}{4})} - \tfrac{3}{2} = \sqrt{(169 : 4)} - \tfrac{3}{2} = \tfrac{13}{2} - \tfrac{3}{2} = \tfrac{10}{2} = 5$/ und demnach $x = 8$.

Die 22. Aufgabe.

83. **Die Natur der dritten Dignität einer Binomischen Wurtzel zu finden.**

Auflösung

Ihr habet nur die andere Dignität/

$$a^2 + 2ab + b^2$$

durch die Wurtzel $a + b$ zu multipliciren (§.37)

$$+a^2 b + 2ab^2 + b^3$$
$$a^3 + 2a^2 b + ab^2$$
$$a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

Lehrsatz.

Die dritte Dignität einer Binomischen Wurtzel enthält in sich die dritte Dignität der beyden Theile (a^3 und b^3) und ein Product aus dem Qvadrate des ersten Theiles drey mal genommen ($3a^2$) in den anderen Theil (b) nebst noch einem anderen Producte aus dem ersten Theile drey mal genommen ($3a$) in das Qvadrat des anderen Theiles (b_2).

Die 1. Anmerckung.

84. Ihr habet hier abermals auf eine sehr leichte Art den 3 Lehrsatz der Rechen-Kunst (§. 92 Arithm.) gefunden/ daraus die Ausziehung der Cubic-Wurtzel hergeleitet worden (§. 96 Arithm.) Wenn ihr aber die dort gegebenen Regeln vergessen hättet/ könnte euch das allgemeine Exempel $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$ an deren stat dienen. Denn ihr sehet/ daß/wenn ihr in der ersten Classe zur lincken die daselbst befindliche dritte Dignität a^3 abziehet/ ihr den ersten Theil der Wurtzel a habet. Wenn ihr nun aus den übriegen drey Gliedern den anderen Theil finden wollet/ müsset ihr das erste zur lincken $3a^2 b$ durch das Qvadrat des ersten drey

mal

mal genommen ($3a^2$) dividiren und hernach nicht allein das Product aus diesem Divisore ($3a^2$) in den neuen Qvotienten (b), sondern auch das Product aus dem Qvadrate des neuen Qvotientens (b^2) in dem vorhergehenden dreymal genommen ($3a$) und endlich die dritte Dignität des neuen Qvotientens (b^3) abziehen.

Zusatz.

85. Setzet $a = a + b$ und $b = c$, so kommet für die dritte Dignität der Trinomischen Wurtzel $a + b + c$ heraus $(a+b)^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3$, und allso müsset ihr zu der Dignität der Binomischen Wurtzel noch das Product aus dem Qvadrate der Binomischen Wurtzel dreymal genommen $3(a+b)^2$ in den dritten Theil (c) das Product aus der Binomischen Wurtzel dreymal genommen $3(a+b)$ in das Qvadrat des dritten Theiles (c^2) und die dritte Dignität desselben Theiles (c^3) addiren. Setzet $a = a+b+c$ und $b = d$, so ist die 3te Dignität der Qvadrinomischen Wurtzel $(a+b+c)^3 + 3(a+b+c)^2 d + 3(a+b+c) d^2 + d^3$ folgends müsset ihr noch zu der Dignität der Trinomischen Wurtzel $(a+b+c)^3$ das Product aus dem Qvadrate der Trinomischen Wurtzel dreymal genommen $3(a+b+c)^2$ in den vierdten Theil, das Product aus der Trinomischen Wurtzel dreymal genommen $3(a+b+c)$ in das Qvadrat des vierdten Theiles d^2 und die dritte

Digni-

Dignität des vierdten Theiles d^3 addiren. Solcher gestalt sehet ihr/ daß ihr nach der Binomischen Regel auch die dritte Dignität einer jeden Polynomischen Wurtzel finden/ ingleichen aus einer gegebenen Zahl eine jede Polynomische Cubic-Wurtzel ziehen könnet. Den $(a+b+c+d+e$ &c.$)^3$ $= a^2 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3 + 3(a+b+c)^2 d + 3(a+b+c)d^2 + d^3 + 3(a+b+c+d)^2 e + 3(a+b+c+d)e^2 + e^3$ u. s. w. unendlich fort.

Anmerckung.

86. Auf eben solche Weise könnet ihr für die höheren Dignitäten Regeln finden. Und unerachtet ich in der folgenden Aufgabe zeigen werde/ wie ihr an stat unendlicher Regeln für unendliche Dignitäten/ zu denen eine Größe erhoben werden kan/ eine einige finden könnet; so wird euch die Mühe doch nicht verdrüssen/ wenn ihr auf gleiche Art die Natur der vierdten/ fünften/ sechsten Dignität u. s. w. untersuchet. Denn diese Untersuchung selbst wird euch dienen die allgemeine Regel zu erfinden.

Die 23. Aufgabe.

87. **Eine allgemeine Regel zufinden/ nach welcher jede Binomische Wurtzel zu jeder verlangeten Dignität erhoben werden kan.**

Auflösung.

Wenn ihr die Binomische Wurtzel nach und nach zu ihren Dignitäten erhebet/ wie beygefügete Tabelle ausweiset

so wer-

$1a$	$1b$							
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$						
$1a$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$					
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$				
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$			
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$		
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$	
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^3b^5$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$

so werdet ihr wahrnehmen / daß eine jede Dignität aus verschiedenen Producten zusammen gesetzet ist / und diese Producte durch verschiedene Zahlen in einander multipliciret werden. Es entstehen aber diese Producte

(4) D wenn

wenn ihr jeden Theil der Wurtzel zu allen niedrigeren Dignitäten als die gegebene ist/ erhebet/ und sie verkehret in einander multipliciret. Z. E. in der sechsten Dignität sind alle Dignitäten von 1 bis zu der sechsten der beyden Theile $a^6 . a^5 . a^4 . a^3 . a^2 . a . 1$ und $1 . b . b^2 . b^3 . b^4 . b^5 . b$. Multipliciret die erste Reihe in die andere/ so bekommet ihr $1a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + 1b^6$/ das ist/ alle Producte/ woraus die sechste Dignität bestehet/ ausser denen Zahlen/ welche sie multipliciren/ und nach dem Exempel des Oughtred (Clavis Mathematicæ c. 12. §. 6. p. m. 38) sonderlich von denen Engelländern Unciæ genennet werden. Derowegen wenn der Exponente m ist/ so sind die Producte $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4 + a^{m-5}b^5 + a^{m-6}b^6$ u. s. w. unendlich fort.

Wenn ihr nun ferner die Untzen mit den Exponenten der Potentz vergleichet/ so werdet ihr finden/ daß ihr für

1 + 1
1 + 2 + 1
1 + 3 + 3 + 1
1 + 4 + 6 + 4 + 1
1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1
1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1
1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 &c.

setzen könnet

$$1 \dagger \frac{1-0}{1}.\ 1$$

$$1 \dagger \frac{2-0}{1}.\ 1 \dagger \frac{2-1}{2}.\ \frac{2-0}{1}.\ 1$$

$$1 \dagger \frac{3-0}{1}.\ 1 \dagger \frac{3-1}{2}.\ \frac{3-0}{1}.\ 1 \dagger \frac{3-2}{3}.\ \frac{3-1}{2}.$$

$$\frac{3-0}{1}.\ 1$$

$$1 \dagger \frac{4-0}{1}.\ 1 \dagger \frac{4-1}{2}.\ \frac{4-0}{1}.\ 1 \dagger \frac{4-2}{3}.$$

$$\frac{4-1}{2}.\ \frac{4-0}{1}.\ 1 \dagger \frac{4-3}{4}.\ \frac{4-2}{3}.\ \frac{4-1}{2}.$$

$$\frac{4-0}{1}.\ 1$$

$$1 \dagger \frac{5-0}{1}.\ 1 \dagger \frac{5-1}{2}.\ \frac{5-0}{1}.\ 1 \dagger \frac{5-2}{3}.\ \frac{5-1}{2}.$$

$$\frac{5-0}{1}.\ 1 \dagger \frac{5-3}{4}.\ \frac{5-2}{3}.\ \frac{5-1}{2}.\ \frac{5-0}{1}.\ 1$$

$$\dagger \frac{5-4}{1}.\ \frac{5-3}{4}.\ \frac{5-2}{3}.\ \frac{5-1}{2}\ \frac{5-0}{1}.\ 1$$

$$1 \dagger \frac{6-0}{1}.\ 1 \quad \dagger \frac{6-1}{2}\ \frac{6-0}{1}.\ 1 \dagger \frac{6-2}{3}.\ \frac{6-1}{2}$$

$$\frac{6-0}{1}.\ 1 \dagger \frac{6-3}{4}.\ \frac{6-2}{3}.\ \frac{6-1}{2}.\ \frac{6-0}{1}.\ 1$$

$$\dagger \frac{6-4}{5}.\ \frac{6-3}{4}.\ \frac{6-2}{3}\ \frac{6-1}{2}.\ \frac{6-0}{1}.\ 1$$

$$\dagger \frac{6-5}{6}.\ \frac{6-4}{5}.\ \frac{6-3}{4}.\ \frac{6-2}{3}.\ \frac{6-1}{2}$$

$$\frac{6-0}{1}.\ 1$$

$$1 \dagger \frac{7-0}{1}.\ 1 \dagger \frac{7-1}{2}.\ \frac{7-0}{1}.\ 1 \dagger \frac{7-2}{3}.\ \frac{7-1}{2}$$

$$\frac{7-0}{1}.\ \frac{7-3}{4}.\ \frac{7-2}{3}.\ \frac{7-1}{2}.\ \frac{7-0}{1}.\ 1$$

$$\dagger \frac{7-4}{5}.\ \frac{7-3}{4}.\ \frac{7-2}{3}.\ \frac{7-1}{2}.\ \frac{7-0}{1}.\ 1$$

$$\dagger \frac{7-5}{6}.\ \frac{7-4}{5}.\ \frac{7-3}{4}.\ \frac{7-2}{3}.\ \frac{7-1}{2}$$

$$\frac{7-0}{1}.\ 1 \dagger \frac{7-6}{7}.\ \frac{7-5}{6}.\ \frac{7-4}{5}.\ \frac{7-3}{4}$$

$$\frac{7-2}{3}.\ \frac{7-1}{2}.\ \frac{7-0}{1}.\ 1\ \&c.$$

Denn

Denn z. E. $\frac{1-0}{1} = 1$/ $\frac{2-0}{1} \cdot 1 = 2$/ $\frac{2-1}{2} \cdot \frac{2-0}{1} \cdot 1 = 1$/ $\frac{3-0}{1} \cdot 1 = 3$/ $\frac{3-1}{2} \cdot \frac{3-0}{1} \cdot 1 = 3$ u. s. w.

Derowegen wenn der Exponente eine undeterminirte Zahl m ist/ so sind die zu der Dignität gehörigen Unciæ $1 + \frac{m-0}{1} \cdot 1 + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-0}{1} \cdot 1 + \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-0}{1} \cdot 1 + \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-0}{1} \cdot 1 + \frac{m-4}{5} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-0}{1} \cdot 1 + \frac{m-5}{6} \cdot \frac{m-4}{5} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-0}{1} \cdot 1$. &c.

Wenn ihr nun diese Uncias (von welchen ihr 1 weglassen könnet/ weil sie keine Zahl multipliciret) in die oben gefundenen Producte multipliciret; so bekommet ihr für die Dignität m von $a + b$

$a^{m} + \frac{m-0}{1} a^{m-1}b + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-1}{0} a^{m-2}b^{2} + \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-0}{1} a^{m-3}b^{3} + \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-1}{2}$.

$\frac{m-0}{1}\,a^{m-4}b^4 + \frac{m-4}{5}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-0}{1}\,a^{m-5}b^5 + \frac{m-5}{6}.\frac{m-4}{5}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-0}{1}\,a^{m-6}b^6$ &c. das ist, weil $a^{m-1} = a^m : a$, $a^{m-2} = a^m : a^2$, $a^{m-3} = a^m : a^3$, u. s. w. (§. 40) und $\frac{m-0}{1} = m$, $a^m + m\frac{a^m b}{a} + \frac{m-1}{2}.\,m\frac{a^m b^2}{a^2} + \frac{m-2}{3}.\frac{m-1}{2}.\,m\frac{a^m b^3}{a^3} + \frac{m-3}{4}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-1}{2}.\,m\frac{a^m b^4}{a^4} + \frac{m-4}{5}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-1}{2}.\,m\frac{a^m b^5}{a^5} + \frac{m-5}{6}.\frac{m-4}{5}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-1}{2}.\,m\frac{a^m b^6}{a^6}$ u. s. w. unendlich fort.

Wenn ihr nun ferner $a = P$ und $b : a = Q$, das erste Glied $= A$, das andere $= B$; das dritte $= C$, das vierdte $= D$, das fünfte $= E$ u. s. w. setzet; so findet ihr endlich $(P + PQ)^m = P^m + m\,AQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + \frac{m-4}{5}EQ + \frac{m-5}{6}FQ$ u. s. w. unendlich fort.

Also habet ihr eine allgemeine Regel gefunden, nach welcher ihr eine jede Binomische

sche Wurtzel zu einer jeden verlangeten Dignität erheben könnet.

Die 1. Anmerckung.

88. Ihr verlanget die vierdte Dignität von 18 oder 10 † 8/ so ist $m = 4$/ $P = 10$/ $Q = 8:10 = 4:5$/ folgends P^m $10^4 = 4000 = A$

$m\,A\,Q = 4 \cdot 10000 \cdot \frac{4}{5} = 32000 = B$

$\frac{m-1}{2}\,B\,Q = \frac{3}{2} \cdot 32000 \cdot \frac{4}{5} = 38400 = C$

$\frac{m-2}{3}\,C\,Q = \frac{2}{3} \cdot 38400 \cdot \frac{4}{5} = 20480 = D$

$\frac{m-3}{4}\,D\,Q = \frac{1}{4} \cdot 20480 \cdot \frac{4}{5} = 4096 = E$

$\frac{m-4}{5}\,E\,Q = 0 \cdot 4096 \cdot \frac{4}{5} = \quad 0 = F$

$$\begin{array}{r} 10000 = A \\ 32000 = B \\ 38400 = C \\ 20480 = D \\ 4096 = E \\ \hline 104976 \end{array}$$

104976 vierdte Dignität von 18.

Die 2. Anmerckung.

89. Ihr werdet vielleicht meinen/ daß man mit leichter Mühe durch das gewöhnliche multipliciren/ die gegebenen Zahlen zu der verlangeten Dignität erheben kan/ und dannenhero die gefundene allgemeine Regel für unnütze halten. Allein ihr söllet zu seiner Zeit erfahren/ wie sehr ihr euch in eurer Meinung betrogen/ wenn ihr den vielfältigen Nutzen derselben

verspühren werdet. Jetzt erinnnere ich nur dieses. Wenn ihr aus einer gegebenen Zahl eine verlangete Wurtzel ausziehen sollet; so könnet ihr die Regeln/ nach welchen solches geschiehet/ wie für die Quadrat- und Cubic-Wurtzel (§. 76. 84) finden/ wenn ihr durch die gefundene allgemeine Regel die Binomische Wurtzel $a+b$ zu der gehörigen Dignität erhebet. Z. E. Ihr sollet die Wurtzel der fünften Dignität aus einer gegebenen Zahl ziehen : so dörfet ihr nur $a+b$ zu der fünften Dignität erheben. Das allgemeine Exempel von derselben wird euch die Regeln bald in die Hand geben.

Die 3. Anmerckung.

90. Gleichwie ihr aber oben gesehen habet / daß die Regeln für die Binomische Wurtzeln auch dienen eine Polynomische Wurtzel zu der andern und dritten Dignität zu erheben (§. 77. 85) ; allso gehet es auch an/ daß ihr nach dieser allgemeinen Regel / die zwar eigentlich auch nur auf Binomische Wurtzeln gerichtet ist/ auf eine gleiche Weise eine jede Polynomische Wurtzel zu der verlangeten Dignität erhebet.

Die 24. Aufgabe.

91. **Eine allgemeine Regel zu finden aus allen Dignitäten eine verlangte Binomische Wurtzel zu ziehen.**

Auflösung.

Weil $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§. 46) / so ist das Wurtzel-Ausziehen so viel als eine Grösse zu einer Dignität erheben / die zu ihrem Exponenten eine gebrochene Zahl hat. Derowegen wenn ihr in der vorhin gefundenen Regel an stat des Exponenten m den Exponen-

nenten $m:n$ setzet / so bekommet ihr eine allgemeine Regel / nach welcher so wol jede Grösse zu einer verlangeten Dignität erhoben / als aus derselben eine verlangete Wurtzel gezogen werden kan. Es ist aber folgende:

$$\sqrt[n]{(P+PQ)^m} = P^{m:n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \frac{m-4n}{5n}EQ + \frac{m-5n}{6n}FQ$$

u. s. w. unendlich fort.

Die 1. Anmerckung.

92. Diese sehr nützliche Regel hat der vortreffliche Geometra in Engelland *Isaac Nevvton* zu erst gefunden auf eben dem Wege / den ich angewiesen habe: wie solches aus dem Briefe erhellet / denn er A. 1676 an den unvergleichlichen Mathematicum und Polyhistorem, den Herrn geheimen Rath von Leibnitz / geschrieben und Wallisius mit in den dritten Theil seiner Mathematischen Wercke f. 622 drucken lassen. Es ist aber diese Regel einerley mit der vorigen. Den wie ihr $m:n$ durch gantze Zahlen in dem Gebrauche derselben erklähren könnet / wenn ihr $n = 1$ setzet; so könnet ihr auch in der vorigen Regel m durch einen Bruch erklähren / wenn eine Wurtzel ausgezogen werden sol / z. E. ihr setzet $m = \frac{1}{2}$ / wenn ihr die Qvadrat-Wurtzel verlanget / $m = \frac{1}{3}$ wenn ihr die Cubic-Wurtzel suchet u. s. w.

Die 2. Anmerckung.

93. Damit ihr aber den Gebrauch der Regel deutlich erkennen möget; so wil ich selbige mit einem Exempel erläutern. Ihr verlanget zu wissen

die Qvadrat-Wurtzel aus $aa - x^2$: so ist $m = 1$, $n = 2$, $P = a^2$, $Q = -x^2 : a^2$, folgends.

$$P^{m:n} = a = A$$

$$+\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2} a \cdot -x^2 : a^2 = -\frac{x^2}{2a} = B$$

$$+\frac{m-n}{2n} BQ = \frac{1-2}{4} \cdot -\frac{x^2}{2a} \cdot -\frac{x^2}{a^2} = -\frac{x^4}{8a^3} = C$$

$$+\frac{m-2n}{3n} CQ = \frac{1-4}{6} \cdot -\frac{x^4}{8a^3} \cdot -\frac{x^2}{a^2} = -\frac{x^6}{16a^5} = D$$

$$+\frac{m-3n}{4n} DQ = \frac{1-6}{8} \cdot -\frac{x^6}{16a^5} \cdot -\frac{x^2}{a^2} = -\frac{5x^8}{128a^7} = E$$

$$+\frac{m-4n}{5n} EQ = \frac{1-8}{10} \cdot -\frac{5x^8}{128a^7} \cdot -\frac{x^2}{a^2} = -\frac{7x^{10}}{256a^9} \text{ \&c.}$$

Demnach ist $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^5}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$ u. s. w. unendlich fort.

Die 3. Anmerckung.

94. Wenn man aus der gegebenen Grösse eine vollkommene Wurtzel haben kan, so ist die Zahl der Glieder allzeit endlich. Hingegen wo dergleichen nicht vorhanden, so gehen die Glieder unendlich fort. Man nim-

nimmet aber von denselben so viele in jedem Falle als nöthig ist / biß nemlich durch Weglassung der übrigen kein mercklicher Fehler entstehet.

Die 4. Anmerckung.

95. Wen einem die 23 und 24 Aufgabe zu schweer vorkommen sollte / der kan sie so lange bey Seite setzen / biß wir unten ihrer nöthig haben werden.

Die 25. Aufgabe.

96. Die Differentz zweyer Qvadrate zu finden / derer Wurtzeln umb 1 unterschieden sind.

Auflösung.

Es sey die eine Wurtzel n / die andere $n+1$ / so ist das Qvadrat der grossen n^2+2n+1
——— der kleinen n^2

die Differentz $2n+1$

Weil nun eine jede Zahl zweymal genommen eine gerade Zahl bringet und eine gerade Zahl von einer ungeraden umb 1 unterschieden ist; so ist die Differentz zweyer Qvadrate / derer Wurtzeln umb 1 unterschieden sind / eine ungerade Zahl und zwar diejenige / welche heraus kommet / wenn man die kleine Wurtzel mit 2 multipliciret und das Product umb 1 vermehret. Es seyn die Wurtzeln 8 und 9 / so ist die Differentz ihrer Qvadrate 17.

Der 1. Zusatz.

97. Es sind so viel ungerade als gerade Zahlen und dannenhero halb so viel ungerade als

als ungerade und gerade zusammen. Derowegen wenn ihr die kleine Wurtzel mit 2 multipliciret und 1 dazu addiret/ so kommet die ungerade Zahl heraus/ welche in der Reihe der ungeraden Zahlen der Ordnung nach eben die Stelle hat/ welche der grossen Wurtzel nach der Ordnung in der natürlichen Reihe der Zahlen bekommet. Z. E. 9 ist die neunte Zahl in ihrer Ordnung von 1/ hingegen 17/ die Differentz des Qvadrates von 8 von dem Qvadrate von 9 ist die neunte ungerade Zahl.

Der 2. Zusatz.

98. Daher werden die Qvadrat Zahlen in ihrer Ordnung nach einander gefunden/ wenn man die ungeraden Zahlen in ihrer Ordnung zu einander addiret.

Wurtzeln.	ungerade Zahlen.	Qvad. Zahl.
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64
9	17	81
10	19	100

Die

Die 26. Aufgabe.

99. Zu finden/ was für eine Zahl heraus kommet/ wenn man eine gerade Zahl zu einer ungeraden addiret/ oder sie von einander abziehet/ oder auch durch einander multipliciret.

Auflösung.

Weil eine gerade Zahl sich in zwey gleiche Theile theilen lässet/ eine ungerade aber umb 1 von einer geraden unterschieden ist; so nennet die gerade Zahl $2x$/ die ungerade $2y + 1$

$2y + 1$	$2y + 1$	$2y + 1$
$2x$	$2x$	$2x$
Sume $2x + 2y + 1$	Differ. $2y + 1 - 2x$	Prod. $4xy + 4x$

die Summe und Differentz sind ungerade Zahlen/ das Product ist eine gerade Zahl. Denn dieses lässet sich halbiren/ jenes nicht.

Die 27. Aufgabe.

100. Zu finden/ was für eine Zahl heraus kommet/ wenn man eine gerade Zahl zu einer geraden addiret/ oder sie voneinander subtrahiret/ oder auch durcheinander multipliciret.

Auflösung.

Es sey die eine gerade Zahl $2x$/ die andere $2y$. So ist die Summe $2x + 2y$/ die Differentz $2x - 2y$/ das Product $4xy$ und allso sind alle

alle drey gerade Zahlen / denn sie lassen sich halbiren.

Die 29. Aufgabe.

101. Zu finden / was für Zahlen herauskommen / wenn ihr eine ungerade Zahl zu einer ungeraden addiret / oder sie voneinander subtrahiret / oder auch durcheinander multipliciret.

Auflösung.

Es sey die eine ungerade Zahl $2x + 1$ / die andere $2y + 1$.

$$\begin{array}{ll} 2x + 1 & 2x + 1 \\ 2y + 1 & 2y + 1 \\ \hline \text{Sume} = 2x + 2y + 2 & \text{Differ.} = 2x - 2y \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x + 1 \\ 2y + 1 \\ \hline + 2x + 1 \\ 4xy + 2y \\ \hline \end{array}$$

Prod. $= 4xy + 2x + 2y + 1$

Die Summe und Differentz lassen sich halbiren / sind allso gerade Zahlen. Das Product läßet sich nicht halbiren: ist allso eine ungerade Zahl.

Die 30. Aufgabe.

102. Zufinden / was für Zahlen heraus kommen / wenn ihr lauter gerade Zahlen / oder eine gerade Anzahl ungerader

rader Zahlen/ oder auch eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen addiret.

Auflösung.

Es seyn die gerade Zahlen $2x$/ $2y$/ $2z$/ $2t$ u. s. w. so ist die Summe $2x + 2y + 2z + 2t$ u. s. w, das ist $2(x + y + z + t$ u. s. w.) allso eine gerade Zahl. Derowegen die Summe von lauter geraden Zahlen ist eine gerade Zahl.

Es seyn die ungeraden Zahlen $2x + 1$/ $2y + 1$/ $2z + 1$/ $2t + 1$ u. s. w. ihre Anzahl $2m$. So ist ihre Summe $2x + 2y + 2z + 2t$ u. s. w. $+ 2m$/ das ist $2(x + y + z + t$ u. s. w.) $+ 2m$/ folgends eine gerade Zahl. Derowegen Wenn lauter ungerade Zahlen in gerader Anzahl zusammen addiret werden/ so ist die Summe eine gerade Zahl.

Es seyn die ungeraden Zahlen abermals $2x + 1$/ $2y + 1$/ $2z + 1$/ $2t + 1$ u. s. w. ihre Anzahl $2m + 1$. So ist ihre Summe $2x + 2y + 2z + 2t$ u. s. w. $+ 2m + 1$/ das ist/ $2(x + y + z + t$ u. s. w.) $+ 2m + 1$/ folgends eine ungerade Zahl. Derowegen wenn lauter ungerade Zahlen in ungerader Anzahl zusammen addiret werden/ so ist die Summe eine ungerade Zahl.

Anmerckung.

103. Wenn diese Aufgaben gleich sonst keinen Nutzen hätten/ so sollten sie euch doch angenehm seyn/ weil sie euch eine neue Maxime der Benennung an die Hand geben. Ihr werdet aber auch bey anderen Gelegen-

legenheiten ihren Nutzen verspüren. Z. E. wenn einer verlangete / ihr solltet 20 in 5 ungerade Zahlen theilen; so werdet ihr bald sehen / daß dieses unmöglich sey / weil ungerade Zahlen in ungerader Anzahl eine ungerade Zahl bringen / wenn sie summiret werden.

Die 31. Aufgabe.

104. **Zu finden / was für eine Dignität herauskommet / wenn man eine Qvadrat-oder Cubic-Zahl durch sich selbst multipliciret.**

Auflösung.

Es sey die Qvadrat-Zahl x^2 / die Cubic-Zahl x^3. Multipliciret jede durch sich selbst so kommet in dem ersten Falle x^4 / in dem anderen x^6 / weil der Exponente 4 sich durch 2 / der Exponente 6 aber so wol durch 2 als durch 3 sich dividiren lässet; so ist x^4 ein Qvadrat / x^6 aber zugleich eine Qvadrat- und eine Cubic-Zahl. Derowegen **wenn eine Qvadrat-Zahl durch sich selbst multipliciret wird / so ist das Product eine Qvadrat-Zahl: Wenn eine Cubic-Zahl durch sich selbst multipliciret wird / so ist das Product zugleich eine Quadrat- und auch eine Cubic-Zahl.**

Anmerckung.

105. Auf diese Manier könnet ihr noch gar viel andere dergleichen Lehrsätze finden / wenn ihr dieselben nöthig habet.

Die 32. Aufgabe.

106. **Zu finden / wie groß in einer Arith-**

rithmetischen Progreßion die Summe der beyden äusersten Glieder sey.

Auflösung.

Es sey das erste Glied a / der Unterscheid der Glieder d / so ist die Progreßion (§. 66. Arithm.)

$$a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ a+4d.\ a+5d$$

$$\begin{array}{ccccc} a+4d & & a+2d & & a \\ \hline 2a+5d & = & 2a+5d & = & 2a+5d \end{array}$$

$$a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ a+4d$$

$$\begin{array}{ccccc} a+3d & & 2 & & a \\ \hline 2a+4d & = & 2a+4d & = & 2a+4d \end{array}$$

Lehrsatz.

In einer Arithmetischen Progreßion ist die Summe der beyden äusersten Glieder der Summe jeder zweyen Glieder gleich / die von den äusersten gleich weit abstehen / ingleichen zweymal so groß als das mittlere / wenn die Glieder an der Zahl ungleich sind.

Z. E. 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 12 & 9 & 6 & 3 \\ \hline & & & 24 = & 24 = & 24 = & 24 \end{array}$$

Der 1. Zusatz.

107. Derowegen bekommet ihr die Summe der gantzen Progreßion / wenn ihr die Summe des ersten und letzten Gliedes durch

die halbe Zahl der Glieder multipliciret. Es sey das erste Glied a, die Differentz d, die Zahl der Glieder n, so ist das letzte Glied $a + (n - 1) d$, folgends die Summe der Progreßion $(2a + (n - 1) d) \frac{1}{2} n = an + (n^2 - n) \frac{1}{2} d$. Es sey Z. E. $a = 3$, $n = 7$, $d = 3$, so ist die Summe der Progreßion $21 + (49 - 7) \frac{3}{2} = 21 + 42 . \frac{3}{2} = 21 + 21 . 3 = 21 + 63 = 84$.

Der 2. Zusatz.

108. Ihr könnet demnach die Summe einer Arithmetischen Progreßion finden, wenn euch das erste Glied, der Unterscheid und die Zahl der Glieder gegeben sind.

Die 33. Aufgabe.

109. **Aus dem ersten und letzten Gliede einer Arithmetischen Progreßion und dem Unterscheide der Glieder, ihre Zahl und die Summe der Progreßion zufinden.**

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ die Zahl der Glieder $= x$
das letzte $= b$ die Sume $= y$
der Unterscheid $= d$

So ist (§. 107)

$b = a + dx - d$ $y = \frac{1}{2}(b + a) x$

$b + d - a = dx$

$(b + d - a) : d = x$

Setzet diesen Werth in die Stelle von x in der anderen Gleichung, so habet ihr $y = (b^2 + bd - ab + ab + ad - a^2) : 2d = (b^2 + bd + ad - a^2) : 2d = \frac{1}{2}(b + a) + (b^2 - a^2) : 2d$

Es sey z. E. $a = 2$, $b = 17$, $d = 3$, so ist $x = (17 + 3 - 2) : 3 = 18 : 3 = 6$ und $y = \frac{1}{2}(17 + 2) + (289 - 4) : 6 = \frac{19}{2} + \frac{285}{6} = 9\frac{1}{2} + 47\frac{1}{2} = 57$.

Die 34. Aufgabe.

110. Aus dem ersten Gliede, dem Unterscheide der Glieder, und der Summe einer Arithmetischen Progreßion die Zahl der Glieder und das letzte Glied zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ die Zahl der Glieder $= x$
der Unterscheid $= d$ das letzte Glied $= y$
die Summe $= c$
So ist (§. 107)

$\frac{1}{2}x(a + y) = c \quad a + dx - d = y$

$ax + xy = 2c$

$$xy = 2c - ax$$

x

$$y = (2c - ax) : x$$ folgends

$$(2c - ax) : x = a + dx - d$$

x

$$2c - ax = dx^2 + ax - dx$$

d

$$2c : d = x^2 + \frac{(2a - d)}{d}\, x$$

Setzet $(2a - d) : d = m$, so ist

$$2c : d = x^2 + mx$$

$\frac{1}{4}m^2$, $\frac{1}{4}m^2$ (§. 79).

$$\frac{1}{4}m^2 + 2c : d = x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2c : d)} = x + \tfrac{1}{2}m$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2c : d)} - \tfrac{1}{2}m = x$$

Es sey $a = 2$, $d = 3$, $c = 57$, so ist $m = (4-3) : 3 = \frac{1}{3}$, folgends $x = \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{114}{3})} - \frac{1}{6} = \sqrt{\frac{1369}{36}} - \frac{1}{6} = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$. Ferner ist $y = 2 + 18 - 3 = 2 + 15 = 17$.

Die 35. Aufgabe.

111. **Aus dem ersten und letzten Gliede und der Summe einer Arithmetischen Progreßion die Zahl und den Unterscheid der Glieder zu finden.**

Auf-

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ die Zahl der Glieder $= x$

das letzte $= b$ der Unterscheid $= y$

die Summe $= c$

So ist (§. 107)

$\frac{1}{2} x (a + b) = c \qquad a + xy - y = b$

$x (a + b) = 2c \qquad xy - y = b - a$

$x = 2c : (a + b) \qquad xy = b + y - a$

$x = (b + y - a) : y$

Folgends

$2c : (a + b) = (b + y - a) : y$

$2cy : (a + b) = b + y - a$

$2cy = ab + ay - a^2 + b^2 + by - ab$

$2cy - ay - by = b^2 - a^2$

$y = (b^2 - a^2) : (2c - a - b)$

Es sey $= a = 2$ / $b = 17$ / $c = 57$ / so ist $x = 114 : (2 + 17) = 114 : 19 = 6$ / und $y = 17^2 - 2^2) : (114 - 2 - 17) = (289 - 4) : (114 - 19) = 285 : 95 = 3$.

Die 36. Aufgabe.

112. Aus dem Unterscheide und der Zahl der Glieder / ingleichen der Summe

me einer Arihmetischen Progreßion/ das erste und letzte Glied/ und folgends alle übrigen/ zu finden.

Auflösung.

Es sey die Zahl der Glieder $= n$ das erste Glied $= x$
der Unterscheid $= d$ das letzte
die Summe $= c$ ($= y$
So ist (§. 107)

$$\tfrac{1}{2}n(x+y) = c \qquad y = x + nd - d$$

2

$$n(x+y) = 2c$$

n

$$x + y = \frac{2c}{n}$$

$$y = \frac{2c}{n} - x$$

Folgends

$$\frac{2c}{n} - x = x + nd - d$$

n

$$2c - nx = nx + n^2d - nd$$

$$2c + nd - n^2d = 2nx$$

2n

$$\frac{c}{n} + \tfrac{1}{2}d - \tfrac{1}{2}nd = x$$

Es sey $n = 6$, $d = 3$, $c = 57$, so ist $x = \frac{57}{6} + \frac{3}{2} - \frac{18}{2} = \frac{57 + 9}{6} - 9 = \frac{66}{6} - 9 = 11 - 9 = 2$ und $y = \frac{114}{6} - 2 = 19 - 2 = 17$.

Die 37. Aufgabe.

113. Aus dem Unterscheide der Glieder, dem letzten Gliede und der Summe einer Arithmetischen Progreßion das erste Glied und die Zahl der Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das letzte Glied $= b$ das erste Glied $= x$

Der Unterscheid $= d$ die Zahl der Glieder $= y$

Die Summe $= c$.

So ist (§. 107)

$$\tfrac{1}{2}y(x + b) = c \qquad b = x + dy - d$$

$$2 \qquad\qquad\qquad\qquad$$

$$y(x + b) = 2c \qquad b + d - dy = x$$

$$y$$

$$x + b = 2c : y$$

$$x = \frac{2c}{y} - b$$

Folgends

$$\frac{2c}{y} - b = b + d - dy$$

$$y$$

$$2c - by = by + dy - dy^2$$

$$dy^2 - 2by - dy = -2c$$

$$y^2 - \frac{(2b-d)}{d} y = -2c:d$$

Setzet $(2b-d):d = -m$, so ist

$$y^2 - my = -2c:d$$
$$\tfrac{1}{4}m^2 \qquad \tfrac{1}{4}m^2 \quad (§. 79)$$

$$y^2 - my + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 - 2c:d$$

$\tfrac{1}{2}m - y$ oder $y - \tfrac{1}{2}m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - 2c:d)}$

$$y = \tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - 2c:d)}$$

Es sey $b = 17$, $d = 3$, $c = 57$, so ist $m = (34 + 3):3 = 37:3$ und $\tfrac{1}{2}m = 37:6$, folgends $y = \tfrac{37}{6} - \sqrt{(\tfrac{1369 - 1368}{36})} = \tfrac{37}{6} - \sqrt{\tfrac{1}{36}} = \tfrac{37}{6} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{36}{6} = 6$, und $x = \tfrac{114}{6} - 17 = 19 - 17 = 2$

Die 38. Aufgabe.

114. **Aus der Summe einer Arithmetischen Progreßion, der Zahl der Glieder und dem Producte aus dem ersten Gliede in das letzte, die Glieder zu finden.**

Auflösung.

Es sey das Product $= a$ das 1ste Glied $= x$
die Zahl der Glieder $= n$ das letzte $= y$
die Summe $= c$

So ist

$\tfrac{1}{2}n$

$\frac{1}{2}n(x+y) = c$ (§. 107) $\quad a = xy$

$n(x+y) = 2c \quad a:x = y$

$x+y = \frac{2c}{n}$

$y = \frac{2c}{n} - x$ folgends

$a:x = \frac{2c}{n} - x$

$a = \frac{2c}{n}x - x^2$

$x^2 - \frac{2c}{n}x = -a$

$c^2:n^2 \quad c^2:n^2$

$x^2 - \frac{2c}{n}x + c^2:n^2 = (c^2:n^2) - a$

$(c:n) - x = \sqrt{(\frac{c^2}{n^2} - a)}$

$\frac{c}{n} - \sqrt{(\frac{c^2}{n^2} - a)}$

Es sey $c = 57$, $n = 6$, $a = 34$, so ist $x = \frac{57}{6} - \sqrt{(\frac{3249}{36} - 34)} = \frac{57}{6} - \sqrt{(\frac{3249-1224}{36})} = \frac{57}{6} - \sqrt{(2025:36)} = \frac{57}{6} - \frac{45}{6} = 12:6 = 2.$

Die 7. Erklährung.

115. Wenn man etliche Glieder von

einer Arithmetischen Progreßion / die sich von 1 anfänget zu einander addiret; so heisset die Summe eine Polygonal-Zahl. (*Numerus Polygonus*).

Die 8. Erklährung.

116. Insbesondere heisset es eine Triangular-Zahl / wenn die Differentz der Glieder in der Progreßion 1 ist; eine Qvadrat-Zahl / wenn sie 2 ist: eine Pentagonal-Zahl / wenn sie 3 ist; eine Hexagonal-Zahl / wenn sie 4 ist u. s. w.

Arithm. Progr.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Triang. Zahlen.	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.
Arithm. Progr.	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.
Qvadr. Zahlen.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.
Arithm. Progr.	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22.
Pentogonal. Zahl.	1.	5.	12.	22.	35.	51.	70.	92.
Arithm. Progr.	1.	5.	9.	13.	17.	21.	25.	29.
Hepagon. Zahl.	1.	6.	15.	28.	45.	66.	91.	120.

Anmerckung.

117. Ihr werdet ins künftige erfahren / daß es nicht ohne Nutzen sey / wenn man allerhand Progreßionen der Zahlen summiren lernet. Zu dem Ende wollen wir auch untersuchen / wie man die Polygonal-Zahlen summiren kan.

Die 9. Erklährung.

118. Die Seite der Polygonal-Zahl heisset die Zahl der Glieder / welche von der Progreßion summiret worden / damit dieselbe entstanden. Die

Die 10. Erklährung.

119. Durch die Zahl der Winckel verstehen wir diejenige/ welche andeutet/ wie viel Winckel die Figur hat/ von der die Polygonal-Zahl ihren Nahmen bekommen.

Der 1. Zusatz.

120. Also ist die Zahl der Winckel in Trigonal-Zahlen 3; in Qvadrat- oder Tetragonal-Zahlen 4; in Pentagonal-Zahlen 5 u. s. w.

Der 2. Zusatz

121. Da nun in Trigonal-Zahlen die Differentz der Glieder 1/ in Qvadrat-Zahlen 2/ in Pentagonal-Zahlen 3 u. s. w. ist; so ist die Zahl der Winckel jederzeit umb 2 grösser als die Differentz der Glieder in der Progreßion/ durch deren Summirung die Polygonal-Zahlen entstehen.

Die 39. Aufgabe.

122. Aus der gegebenen Seite einer Polygonal-Zahl und der Zahl der Winckel die Polygonal-Zahl zu finden.

Auflösung.

Es sey die Seite $= a$

Die Zahl der Winckel $= n$

das erste Glied der Progr. ist $= 1$ (§. 116).

die Differentz der Glieder $= n-2$ (§. 121).

das letzte Glied $1 + (n-2)(a-1)$ (§. 107)

das

das erste Glied 1

Summa des ersten und letzten $2+an-2a-n+2$
halbe Zahl der Glieder $\frac{1}{2}a$ (§. 118).

Polygonal-Zahl $2a+\frac{1}{2}a^2n-a^2-\frac{1}{2}an$ (§. 107)

Es sey $n=3$/ so ist die Trigonal-Zahl $2a+\frac{3}{2}a^2-a^2-\frac{3}{2}a=\frac{1a^2+1a}{2}$.

Es sey $n=4$/ so ist die Tetragonal-Zahl $2a+\frac{4}{2}a^2-a^2-\frac{5}{2}a=\frac{2a^2-0a}{2}$

Es sey $n=5$/ so ist die Pentagonal-Zahl $2a+\frac{4}{2}a^2-a^2-\frac{1}{2}a=\frac{3a^2-1a}{2}$

Es sey $n=6$ so ist die Hexagonal-Zahl $2a+2a^2-a^2-\frac{6}{2}a=\frac{4a^2-2a}{2}$

Es sey $n=7$/ so ist die Hexagonal-Zahl $2a+\frac{7}{2}a^2-a^2-\frac{7}{2}a=\frac{5a^2-3a}{2}$

Es sey $n=8$/ so ist die Octogonal-Zahl $2a+\frac{8}{2}a^2-a^2-\frac{8}{2}a=\frac{6a^2-4a}{2}$ u. s. w. unendlich fort.

Wenn ihr diese Polygonal-Zahlen betrachtet/ so werdet ihr wahrnehmen/ 1. daß eine jede von denselben zusammen gesetzet ist aus dem Qvadrate und der Wurtzel der Seite: 2. daß das Qvadrat multipliciret wird durch die Differentz der Glieder in der Progre-

ction/ daraus die Polygonal-Zahl entstanden; 3. hingegen die Wurtzel durch die Differentz/ so umb zwey vergeringert worden; 4. daß dieses andere Product von dem ersten abgezogen/ und 5. das überbliebene durch 2 dividiret wird. Dieses ist die verlangte allgemeine Regel.

Exempel.

Ihr sollet die sechste Trigonal-Zahl finden. Weil $a = 6$ $\frac{a^2 + a}{2} = \frac{36 + 6}{2} = 18 + 3 = 21$.

Wenn ihr die achte Pentagonal-Zahl suchet/ so ist $a = 8$/ und also $\frac{3a^2 - a}{2} = \frac{3 \cdot 64 - 8}{2}$ $3 \cdot 32 - 4 = 96 - 4 = 92$. Wenn ihr die fünfte Hexagonal-Zahl suchet / so ist $a = 5$/ und also $\frac{4a^2 - 2a}{2} = \frac{4 \cdot 25 - 2 \cdot 5}{2} = 2 \cdot 25 - 5 =$ $50 - 5 = 45$.

Die 40. Aufgabe.

123. Aus der gegebenen Polygonal-Zahl und der Zahl der Winckel die Seite zu finden.

Auflösung.

Es sey die Polygonal-Zahl $= p$ die Seite $= x$
die Zahl der Winckel $= n$
So ist die Differentz der Glieder $n-2$ (§. 121)
das erste Glied. 1 (§. 116)
Derowegen das letzte $1 + (x-1)(x-2)$ (§. 107. 118)

das

Das ist $3 + nx - 2x - n$
Das erste Glied 1 ;

Summe des ersten und letzten $4 + nx - 2x - n$
halbe Zahlen der Glieder $\frac{1}{2}x$ (§. 118)

$2x + \frac{1}{2}nx^2 - x^2 - \frac{1}{2}nx$

Derowegen ist

$$\frac{1}{2}nx^2 - x^2 + 2x - nx = p$$

$$nx^2 - 2x^2 - nx + 4x = 2p$$

$$x^2 \frac{-n+4}{n-2} x = \frac{2p}{n-2}$$

$$x^2 \frac{-n+4}{n-2} x + \frac{(n-4)^2}{2n-4=n-2} = \frac{2p}{n-2} + \frac{n^2-8n+16}{4n^2-16n+16}$$

$$= \frac{8pn-8p+n^2-8n+16}{4n^2-16n+16}$$

$$x \frac{n-4}{2n-4} = \frac{\sqrt{(8pn-16p+n^2-8n+16)}}{2n-4}$$

$$x = \frac{n-4+\sqrt{(8pn-16p+n^2-8n+16)}}{2n-4}$$

Es sey $n = 3$, so ist $x = \frac{3-4+\sqrt{(24p-16p+9-24+16)}}{6-4} = \frac{-1+\sqrt{(8p+1)}}{2}$

Es sey $n = 4$, so ist $x = \frac{4-4+\sqrt{32p-16p+16-32+16)}}{8-4} = \frac{0+\sqrt{(16p+0}}{4}$

Es sey $n = 5$, so ist $x = \frac{5-4 + \sqrt{(40p - 16p + 25 - 40 + 16)}}{10-4} = \frac{1 + \sqrt{(24p + 1)}}{6}$

Es sey $n = 6$, so ist $x = \frac{6-4 + \sqrt{(48p - 16p + 36 - 48 + 16)}}{12-4} = \frac{2 + \sqrt{(32p + 4)}}{8}$

Es sey $n = 7$, so ist $x = \frac{7-4 + \sqrt{(56p - 16p + 49 - 56 + 16)}}{14-4} = \frac{3 + \sqrt{(40p + 9)}}{10}$

Es sey $n = 8$, so ist $x = \frac{8-4 + \sqrt{64p - 16p + 64 - 64 + 16)}}{16-4} = \frac{4 + \sqrt{(48p + 16)}}{12}$

u. s. w. unendlich fort.

Wenn ihr diese Polygonal-Zahlen betrachtet, so werdet ihr wahrnehmen, 1. daß überall die Zahl außer dem Wurtzel-Zeichē die umb 4 vergeringerte Seite der Polygonal-Zahl sey; 2. daß die andere Zahl unter dem Wurtzel-Zeichen das Qvadrat neben der umb 4 vergeringerten Seite der Polygonal-Zahl sey; 3. die erste aber dem Producte aus der Polygonal-Zahl in den Divisorem 4 mal genommen gleichet und 4. der Divisor die Summe der Zahl ausser dem Wurtzel-

ckel-Zeichen und der Seite der Polygonal-Zahl ausmachet.

Es sey 21 eine Trigonal-Zahl: ihr sollet die Seite finden/ das ist/ die wie vieleste sie in ihrer Ordnung ist. Weil p = 21/ so ist die verlangete Seite $\frac{-1 + \sqrt{(168 + 1)}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{(169)}}{2} = \frac{-1 + 13}{2} = \frac{12}{2} = 6$. Es sey p = 45 und zwar eine Hexagonal-Zahl/ so ist die verlangete Seite $\frac{2 + \sqrt{(32 \cdot 45 + 4)}}{8} = \frac{2 + \sqrt{1444}}{8} = \frac{2 + 38}{8} = \frac{40}{8} = 5$.

Zusatz.

124. Wenn ihr allso nach und nach eine gegebene Zahl in die Stelle von p setzet; so werdet ihr sehen/ ob dieselbe mit unter die Polygonal-Zahlen gehöre und in welche Reihe derselben sie zu setzen sey. Denn sie findet in allen Reihen stat/ wo für ihre Seite eine gantze Rational-Zahl heraus kommet. Allso wenn euch 20 wäre gegeben worden/ würdet ihr gefunden haben/ daß es die sechste Trigonal-Zahl sey.

Anmerckung.

125. Ihr dörfet aber nicht weiter versuchen/ ob die gegebene Zahl sich für p setzen lassen/ wenn die Zahl der Winckel derselben gleich wird/ als in dem gegebenen Exempel 21.

Die

Die 41. Aufgabe.

126. Die Größe des Products der beyden äuserſten Glieder in einer Geometriſchen Proportion zu determiniren.

Auflöſung.

Es ſey in dem erſten Falle / wenn nur 3 Glieder ſind / das erſte $= a$ / der Exponente $= m$ / ſo iſt die Proportion

$$\div\, a.\quad ma.\quad m^2a \quad (\S.\ 63.\ 65.\ \text{Arithm.})$$

$$\frac{a}{\quad}$$

$$(ma)^2 = m^2a^2 \ (\S.\ 81\ \text{Arithm.})$$

Es ſey in dem andern Falle / wenn 4 Glieder ſind / das erſte $= a$ / der Exponente $= m$ / das dritte $= b$ / ſo iſt die Proportion

$$a : ma = b : mb \quad (\S.\ 63.\ \text{Arithm.})$$

$$\frac{b}{mab} = \frac{a}{mab}$$

Lehrſatz.

Wenn drey Gröſſen einander Geometriſch proportional ſind / ſo iſt das Product der beyden äuſerſten dem Qvadrate der mittleren gleich: ſind aber vier einander proportional / ſo iſt das Product der äuſerſten dem Producte der beyden mittleren gleich.

Anmerckung.

127. Von den Zahlen iſt dieſes ſchon in der Rechen-Kunſt erwieſen worden (§. 102. 103 Arithm.) Wir haben aber in der Geometrie ſolches mit Recht auch auf die Linien / Flächen und Cörper appliciret / indem

man alle Größen als undeterminirte Zahlen ansehen kan (§. 8): welches nun durch gegenwärtige Algebraische Rechnung noch mehr gerechtfertiget wird.

Die 42. Aufgabe.

127. Drey Geometrisch-Proportional-Grössen zu finden/ aus dem gegebenen Producte des Qvadrates der dritten in die erste und dem Exponenten.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$ die erste Größe $= x$

der Exponente $= m$ so ist die andere $= mx$

die dritte $= m^2x$

Folgends $a = m^4x^3$

$$a : m^4 = x^3$$

$$\sqrt[3]{(a : m^4)} = x$$

Es sey $a = 648$/ $m = 3$/ so ist $x = \sqrt[3]{(648 : 81)} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Die 43. Aufgabe.

128. Aus der gegebenen Summe des ersten und vierdten Gliedes in einer Geometrischen Verhältnis/ ingleichen der Summe des andern und drittens/ und dem Exponenten/ jedes Glied ins besondere zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste Summe $= a$ das erste Glied $= x$
die andere $= b$ so ist das IV $= a-x$
der Exponente $= m$ das andere $= y$
so ist das III. $= b-y$
Folgends $x:y = b-y:a-x$ $mx = y$

$$ax-x^2 = by-y^2 \text{ (§. 126)}$$

$$ax-x^2 = mbx-m^2x^2$$

$$\overline{} \; x$$

$$a-x = mb-m^2x,$$

$$m^2x-x = mb-a$$

$$\overline{} \; m^2-1$$

$$x = \frac{mb-a}{m^2-1}$$

Es sey $a = 13$, $b = 11$, $m = 2$, so ist $x = \frac{22-13}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$ und $y = 6$.

Die 45. Aufgabe.

129. **Aus der gegebenen Summe des ersten und letzten Gliedes und dem Exponenten in einer Geometrischen Proportion von 3 Gliedern, die Glieder selbst zu finden.**

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ das 1ste Glied $= x$
der Exponente $= m$ das 2dere $= mx$
das dritte $= m^2x$

Folgends $a = m^2 x + x$

$\overline{\qquad\qquad} m^2 + 1$

$a:(m^2+1) = x$

Es sey $a = 50$, $m = 2$, so ist $x = 50:(4+1)$ $= 50:5 = 10$, $mx = 20$, $m^2 x = 40$.

Die 45. Aufgabe.

130. **Zu finden, auf wie vielerley Art die Glieder einer Geometrischen Verhältnis versetzet werden können, damit sie einander proportional bleiben.**

Auflösung.

Versetzet sie auf alle mögliche Weise, und vergleichet ihre Summen, Differentzen u. s. w. mit ihnen untereinander: so werdet ihr bald sehen, in welchen Fällen eine Proportion bleibet, wenn ihr nur acht gebet, ob das Product der äusersten Glieder dem Producte der mittleren gleich ist (§. 126.) oder ob in beyden Verhältnissen, die miteinander verglichen werden, einerley Exponente ist (§. 63. Arithm.).

Es sey demnach	$a:ma = b:mb$
so ist (*alternatim*)	$a:b = ma:mb$
(*inverse*)	$ma:a = mb:b$
(*conversim*)	$a+ma:a = b+mb:b$
(*Composite*)	$a+ma:ma = b+mb:mb$
(*Divisim*)	$ma-a:a = mb-b:b$
	$ma-a:ma = mb-b:mb$
Ferner	$a^2:m^2a^2 = b^2:m^2b^2$
oder überhaupt	$a^n:m^na^n = b^n:m^nb^n$
Jngleichen	$a:mac = b:mbc$

c:

$$\begin{array}{l} a : ma = b : mb \\ \quad\;\; \overline{\quad\;\;} \qquad \overline{\quad\;} \\ \qquad c \qquad\quad\; c \\ ac : ma = bc : mb \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a : ma = b : mb \\ \overline{\;\;} \qquad\quad \overline{\;\;} \\ c \qquad\quad\;\; c \\ ac : mac = b : mb \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a : ma = b : mb \\ \overline{\;\;} \;\; \overline{\;\;\;} \\ c \quad\; c \\ ac : mac = bd : mbd \end{array}$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$$

Anmerckung.

131. Hier habet ihr ohne Mühe 16 sehr nützliche Lehrsätze gefunden/ die ihr euch wohl bekandt machen müsset/ wenn ihr ins künftige entweder die Mathematischen Schriften zu lesen / oder auch durch eigenes Nachsinnen Mathematische Wahrheiten heraus zu bringen gedencket. Denn die Geometrische Proportion ist die Seele der Mathematischen Wissenschaften. Ich halte es aber für unnöthig/ die gefundenen Lehrsätze mit Wörtern auszudrucken/ weil ein jeder das für sich selbst thun kan/ wenn er lust darzu hat. Z. E. der 1 Lehrsatz lautet allso: **Wenn vier Grössen proportional sind / so verhält sich auch die erste zu der dritten/ wie die andere zu der vierdten.** Der 11 wird so gegeben: **Wenn ihr in einer Geometrischen Verhältnis das erste und dritte Glied durch**

eine Größe multipliciret; so bleiben auch die veränderten Größen den vorigen proportional.

Die 46. Aufgabe.

131. Zu finden, wie zwey Größen verändert werden können, daß doch ihre Verhältniß gegeneinander unverändert bleibet.

Auflösung.

Es seyn zwey Größen a und ma, die sich gegeneinander verhalten wie 1 zu m; so ist:

I. $$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} \quad ac : mac = a : ma$$

II. $$a : ma \quad c \quad c \quad \frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma$$

III. $$a \quad ma \quad b \quad mb \quad a-b : ma-mb = a : ma = b : mb$$

IV. $$a \quad ma \quad b \quad mb \quad a+b : ma+mb = a : ma = b : mb$$

Lehrsatz.

1. Wenn ihr zwey Größen durch eine dritte multipliciret, so verhalten sich die Producte gegeneinander, wie die multiplicirten Größen. 2. Wenn ihr zwey Größen durch eine dritte dividiret, so

ver-

verhalten sich die Qvotienten wie dieselben Grössen. 3. Wenn sich die weggenommenen Theile gegen einander verhalten wie die gantze Grössen/ so verhalten sich auch die übrigen Theile wie die gantzen Grössen. 4. Wenn die hinzu gesetzten Grössen sich verhalten wie die Grössen/ zu denẽ sie addiret werden/ so haben auch die Summen eben selbige Verhältnis.

Die 47. Aufgabe.

132. Die Grösse des Products der beyden äusersten Glieder in einer Geometrischen Progreßion zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied *a*/ der Exponente oder Nahme der Verhältnis $= m$/ so ist die Progreßion

$$a.\ ma.\ m^2a.\ m^3a.\ m^4a.\ m^5a.\ m^6a.$$

$$\frac{m^5a}{m^6a^2} = \frac{m^3a}{m^6a^2} = \frac{m^2a}{m^6a^2} = \frac{a}{m^6a^2}$$

Lehrsatz.

In einer Geometrischen Progreßion ist das Product der beyden äusersten Glieder dem Producte zweyer von den mittleren gleich/ die von den äusersten gleich weit abstehen/ und dem Qvadrate des mittleren/ wenn sie an der Zahl ungleich sind.

Die 48. Aufgabe.

133. **Die Grösse des Qvotienten zu determiniren/ der heraus kommet/ wenn die Differentz der beyden äusersten Glieder durch den umb 1 vergeringerten Exponenten dividiret wird.**

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$/ der Exponente $= m$/ die Zahl der Glieder $= n$/ so ist das letzte Glied $m^{n-1}a$/ die Differentz des ersten und letzten $m^{n-1}a - a$. Dividiret dieselbe durch $m-1$/ so kommet heraus $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6} + m^{n-7}a$ u. s. w. Wenn demnach n eine determinirte Zahl ist/ z. E. 7/ so ist $n - 7 = 0$ und demnach $m^{n-7} = m^0$/ folgends $m^{n-7}a = a$. Solcher gestalt ist der Qvotient die Summe aller Glieder weniger das letzte.

$+ m^{n-6}a$

$+ m^{n-5}a$

$+ m^{n-4}a$

$+ m^{n-3}a$

$+ m^{n-2}a$

$+ m^{n-1}a \,($ $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a$ u. s. w.

$m^{n-1}a - m^{n-2}a$

$m^{n-2}a - m^{n-3}a$

$m^{n-3}a - m^{n-4}a$

$m^{n-4}a - m^{n-5}a$

$m^{n-5}a - m^{n-6}a$

Zusatz.

134. Wenn ihr demnach die Differentz des

des ersten und letzten Gliedes in einer Geometrischen Progreßion durch den umb 1 vergeringerten Exponenten dividiret/ und zu dem Qvotienten das letzte Glied addiret; so habet ihr die Summe der gantzen Progreßion Es sey das erste Glied a/ der Exponente m/ die Zahl der Glieder n/ so ist das letzte Glied $m^{n-1}a$. Und demnach die Summe der Progreßion $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : (m - 1)$/ das ist/ wenn $m = 2$/ $a = 1$/ $n = 8$/ $128 + 127 : 1 = 255$.

Die 49. Aufgabe.

135. **Aus dem gegebenen ersten und letzten Gliede/ mit der Zahl der Glieder in einer Geometrischen Progreßion/ den Exponenten zu finden.**

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ der Exponente $= x$

das letzte $= b$

die Zahl der Glieder $= n$

So ist $b = x^{n-1}a$

$$b : a = x^{n-1}$$

$$b^{1:(n-1)} : a^{1:(n-1)} = x$$

Es sey $a = 2$/ $b = 486$/ $n = 6$/ so ist $x = \sqrt[5]{486} : \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{243} = 3$.

Die 50. Aufgabe.

136. **Aus dem gegebenen Exponenten/**

der Zahl der Glieder und der Summe der Geometrischen Progreßion das erste Glied zufinden.

Auflösung.

Es sey der Exponente $= m$ das erste Glied $= x$

die Zahl der Glieder $= n$ So ist das letzte $= m^{n-1} x$

die Summe $= c$

Folgends $c = m^{n-1} x + (m^{n-1}x - x) : (m-1)$

$$\overline{\phantom{mc-c = m^n x - m^{n-1}x + m^{n-1}x - x}}\; m-1$$

$$mc - c = m^n\, x - m^{n-1}x + m^{n-1}x - x$$

$$\overline{\phantom{mc-c = m^n x - m^{n-1}x + m^{n-1}x - x}}$$

$$mc - c = m^n x - x$$

$$\overline{}\; m^n - x$$

$$(mc - c) : (m^n - 1) = x$$

Es sey $m = 3$, $n = 6$, $c = 728$, so ist $x = 2 . 728 : 728 = 2$.

Die 51. Aufgabe.

137. Aus dem ersten und letzten Gliede und dem Exponenten die Zahl der Glieder in einer Geometrischen Progreßion zufinden.

Auflösuug.

Es sey das erste Glied $= a$ die Zahl der Glieder $= x$

das letzte $= b$

der Exponente $= m$

So ist $m^{x-1}a = b$, das ist, wenn ihr den

Lo-

Logarithmum von $a = la$ und den Logarithmum von $m = lm$ setzet/

$$x\,lm - lm + la = lb \quad (\text{§. 23. 24 Trig.})$$

$$x\,lm = lb - la + lm$$

$$ - lm$$

$$x\,lm = \frac{lb - la}{lm} + 1$$

Es sey $a = 2$ / $b = 486$ / $m = 3$ / so ist

$$lb = 2.6866363$$
$$la = 0.3010300$$

$$lb - la \quad 2.3856063$$

$$lb - la = 23856063 \;(5$$
$$lm = 4771213 \;\;1$$

$$6 = x$$

Die 52. Aufgabe.

138. **Eine unendliche Zahl Brüche zu summiren/ deren Zehler eines ist/ die Nenner aber in einer Geometrischen Verhältnis fortgehen.**

Auflösung.

Es sey der Nenner des ersten Bruches $= a$/ der Exponente $= m$. Weil die Brüche unendlich abnehmen/ so muß der letzte so kleine werden/ daß er in Ansehung des ersten für nichts zu halten. Und allso ist die Differentz des ersten und letzten Gliedes dem ersten gleich

gleich/ das ist/ $1 : a$/ folgends die Sum̃e $1 : a + 1 : (ma - a) = (m - 1 + 1) : (ma - a) = m : (ma - a)$.

Es sey $m = 2$/ so ist die Summe der Brüche $2 : (2a - a) = 2 : a$/ folgends $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ u. f. w. unendlich fort $= 1$.

Es sey $m = 3$/ so ist die Summe der unendlichen Brüche $3 : (3a - a) = 3 : 2a$/ folgends $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{71}$ u. s. w. unendlich fort $= 3 : 6 = \frac{1}{2}$.

Es sey $m = 4$/ so ist die Summe der unendlichen Brüche $4 : (4a - a) = 4 : 3a$/ folgends $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ u. s. w. unendlich fort $= 4 : 12 = \frac{1}{3}$.

Anmerckung.

139. Wenn der Zehler überall einerley Zahl ist/ als Z. E. 3/ 6/ 8 &c. so könnet ihr eben mit dieser Regel aus kommen. Denn es sey der Nen̄er b/ so ist die Summe $b : a + b : (ma - a) = (bm - b + b) : (ma - a) = bm : (ma - a)$. Also werdet ihr finden/ daß $\frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32}$ &c. $= 6 : 4 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Die 53. Aufgabe.

140. **Die Summe unendlicher Brüche zufinden/ derer Zehler von dem Nenner des ersten umb eine gegebene Grösse kleiner ist/ die Nenner aber in einer Geometrischen Progreßion abnehmen.**

Auf-

Auflösung.

Es sey die Differentz zwischen dem gemeinen Zehler und dem Nenner des ersten Bruches $= y$, der Exponente in der Progreßion der Nenner $= m$, der Nenner des ersten Bruches $= a$, so ist der gemeine Zehler $= a-y$, und demnach der erste Bruch $\frac{a-y}{a}$. Weil nun der letzte Bruch aus der unendlichen Progreßion in Ansehung des ersten nichts ist; so ist der Unterscheid dieser beyden $\frac{a-y}{a}$, folgends die Summe $\frac{a-y}{a}$ $+ \frac{a-y}{ma-a} = \frac{ma-my+a-y-a+y}{ma-a} = \frac{ma-my}{ma-a} = m(a-y):(ma-a)$.

Es sey $m = 2$, $a = 6$, $y = 3$, so ist die Summe der Progreßion $2(6-3):(2.6-6) = 6:6 = 1$, das ist, $\frac{3}{6} + \frac{3}{12} + \frac{3}{24}$ u. s. w. unendlich fort $= 1$.

Eben so findet ihr daß $\frac{5}{7} + \frac{5}{21} + \frac{5}{63}$ u.s.w. unendlich fort $= 15:14$

Anmerckung.

141. Auf eine gleiche Art können noch viel andere Aufgaben aufgelöset werden, welche in die Arithmeticam infinitorum gehören, die *Johannes Wallisius* zu erst erfunden, und *Ismael Bullialdus* weiter ausgeführet. Allein weil man dieselbe nicht mehr sonderlich nöthig hat, nach dem der Herr

von

von Leibnitz seine Differential- und Integral-Rechnung bekandt gemacht; wollen wir uns auch mit derselben nicht aufhalten/ sondern vielmehr zu Geometrischen Aufgaben fort schreiten.

Die 54. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 1. 142. Aus dem gegebenen Radio des Circuls ED/ die Seite des in ihm beschriebenen Regulären Drey-Eckes AB zufinden.

Auflösung.

Weil DB = BE (§. 128 Geom.) und bey F rechte Winckel sind (§. 118 Geom.) so ist auch DF = FE (§. 167 Geom.) Es sey demnach

$DB = a$ $\quad$ $BA = x$

So ist $DF = \frac{1}{2}a$ $\quad$ $BF = \frac{1}{2}x$

folgends $\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}xx$ (§. 167 Geom.)

$$\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}xx \quad | \cdot 4$$

$$3aa = xx$$

$$\sqrt{3aa} = x$$

Ihr findet demnach x/ wenn ihr zwischen $3a$ und a die mittlere Proportional-Linie suchet (§. 106 Arithm. §. 195. Geom.)

Der 1. Zusatz.

143. Weil $3aa = xx$/ so ist $aa : xx = 1 : 3$/ das ist/ $(DE)^2 : (AB)^2 = 1 . 3$.

Der 2. Zusatz.

144. Wenn die Seite des Drey-Eckes b gegeben ist/ und ihr sollet den Radium

des

des Circuls y finden/ welcher umb selbiges beschrieben werden kan; so habet ihr $3y^2 = b$/ und allso ist $y = \sqrt{\frac{1}{3}b^2}$/ folgends dörfet ihr nur zwischen der Linie AB (b) und dem dritten Theile derselben ($\frac{1}{3}b$) die mittlere Proportional-Linie suchen (§. 106 Arithm. §. 195 Geom.)

Der 3. Zusatz.

145. Die halbe Seite AB/ nemlich DF ist der Sinus des Bogens AD von 60° (§. 2 Trigon.) Derowegen könnet ihr durch gegenwärtige Aufgabe den Sinum von 60° finden (§. 11. Trigon.)

Die 55. Aufgabe.

146. Aus dem gegebenen Radio des Circuls AC die Seite des in ihm beschriebenen Regulären Acht-Eckes zufinden. Tab. I. Fig 2.

Auflösung.

Es sey $AC = BC = DC = a$/ $BD = x$ so ist $AB = \sqrt{2a^2}$ (§. 167. Geom.)

$BE = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2}$ (§. 118 Geom.) $= \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$

$EC = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{2}a^2)}$ (§. 167 Geom.) $= \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$

$DE = a - \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$/ folgends (§. 167. Geom.) $x^2 = a^2 - 2a\sqrt{\frac{1}{2}a^2} + \frac{1}{2}a^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$

$x = \sqrt{(2a^2 - 2a\sqrt{\frac{1}{2}a^2})}$

Ihr

Ihr findet die Seite des Acht-Eckes x/ wenn ihr zwischen dem Diametro des Circuls $2a$ und der Differentz der halben Seite des Vier-Eckes BE oder EC ($\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$) von dem Radio DC (a)/ das ist/ der Linie DE die mittlere Proportional-Linie suchet (§. 106. Arithm. 195 Geom.).

Zusatz.

147. Die halbe Seite des Acht-Eckes ist der Sinus des Bogens von 24°30′ (§. 2 Trig.) diesen könnet ihr demnach durch gegenwärtige Aufgabe finden.

Die 58. Aufgabe.

148. Aus der gegebenen Seite des Acht-Eckes DB den Radium des Circuls AC zu finden/ der umb dasselbe beschrieben werden kan.

Tab. I. Fig. 2.

Auflösung.

Es sey DB $= b$/ BC $= y$/ so ist/ vermöge dessen/ was bey der vorhergehenden Aufgabe erwiesen worden

$$b^2 = 2y^2 - 2y\sqrt{\tfrac{1}{2}y^2}$$

$$2y\sqrt{\tfrac{1}{2}y^2} = 2y^2 - b^2$$

$$2y^4 = 4y^4 - 4y^2b^2 + b^4$$

$$-b^4 = 2y^4 - 4b^2y^2$$

2

$$-\tfrac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2$$

b^4 b^4 (§. 79)

$\frac{1}{2}b$

$$\tfrac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2 + b^4$$

$$V\tfrac{1}{2}b^4 = y^2 - b^2$$

$$b^2 + V\tfrac{1}{2}b^4 = y^2$$

$$V(b^2 + V\tfrac{1}{2}b^4) = y$$

Suchet zwischen b und $\frac{1}{2}b$ die mittlere Proportional-Linie $V\frac{1}{2}b^2$ und denn ferner zwischen b und $b + V\frac{1}{2}b^2$ noch eine andere mittlere Proportional-Linie (§.105 Geom.) so ist dieselbe $V(b^2 + bV\frac{1}{2}b^2)$ (§. 106. Arithm.) $= V(b^2 + V\frac{1}{2}b^4)$ (§. 55).

Die 57. Aufgabe.

149. Aus dem gegebenen Radio des Circuls AC die Seite des Zehen-Eckes AB zu finden. Tab. I. Fig. 3.

Auflösung.

Weil AB $= \frac{1}{10}$ der Peripherie/ so ist der Winckel ACB 36°/ folgends sind die Winckel CAB und ABC ein jeder 72 (§. 95. 101. Geom.) und demnach ist DAC 108 (§. 56. Geom.) Machet AD = AC/ so ist jeder von den Winckeln ADC und DCA 36 (§. 95 101 Geom.) daher DCB 72°/ folgends sind die Triangel BAC und BDC einander ähnlich/ und demnach BD : BC = BC : BA (§. 182 Geom.) Es sey AC = BC = AD = a/ AB = x/ so ist BD = $a + x$ und dannenhero vermöge dessen was erwiesen worden/

$$a + x : a = a : x$$

$$a^2 = ax + x^2 \text{ (§. 103. Arithm.)}$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\tfrac{5}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + ax + x^2$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}a + x$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a = x$$

Tab. I. Fig. 4. Richtet auf den Diameter AB den Radium AC $= a$ aus dem centro C perpendicular auf (§. 90 Geom.) und theilet CB in 2 gleiche Theile in E, (§. 112 Geom.) so ist CE $= \tfrac{1}{2}a$ und folgends DE $= \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$ (§. 167 Geom.) machet EF $=$ DE, so ist CF $= \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$.

Anmerckung.

150. Auf solche Art lehret Euclides die Seite des Zehen-Eckes zu finden.

Die 58. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 2. 151. Aus dem gegebenen Radio des Circuls DC, die Seite des Fünf-Eckes AB zu finden.

Auflösung.

Es sey DC $= a$ AB $= x$

so ist DB $= \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a = b$ BE $= \tfrac{1}{2}x$

BC $= \sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}$

DE $= a - \sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}$

folgends (§. 167 Geom.)

$$b^2 = \tfrac{1}{4}x^2 + a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2)} + a^2 - \tfrac{1}{4}x^2$$

$$2aV(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2) = 2a^2 - b^2$$

$$4a^4 - a^2x^2 = 4a^4 - 4a^2b^2$$

$$4a^2b^2 - b4 = a^2x^2$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} a^2$$

$$4b^2 - b4 : a^2 = x^2$$

$$V(4b^2 - b4 : a^2) = x$$

Weil nun $b = V\tfrac{5}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}a$ (§. 149) und dannenhero $b^2 = \tfrac{6}{4}a^2 - aV\tfrac{5}{4}a^2$, $b4 = \tfrac{14}{4}a^4 - 3a^3V\tfrac{5}{4}a^2$, so ist $x^2 = \tfrac{10}{4}a^2 + 2aV\tfrac{5}{4}a^2 - a^2 + \tfrac{6}{4}a^2 + 2aV\tfrac{5}{4}a^2 = a^2 + b^2$. Derowegen ist das Qvadrat von der Seite des Fünf-Eckes den Qvadraten der Seite des Sechs-Eckes DC und des Zehen-Eckes FC gleich / und solchergestalt die Linie DF die Seite des Fünf-Eckes. Tab. I. Fig. 4.

Anmerckung.

152. Euclides lehret abermals die Seite des Fünf-Eckes auf solche Art finden.

Zusatz.

153. Die halbe Seite des Fünf-Eckes ist der Sinus von 36°/ die halbe Seite des Zehen-Eckes der Sinus von 18° (§. 2 Trigon.) Derowegen könnet ihr aus dem gegebenen Radio des Circuls diese beyden Sinus finden. (§. 11 Trigon.).

Die 59. Aufgabe.

154. Eine gerade Linie AC dergestalt in F zu schneiden / daß die gantze Linie Tab. I. Fig. 5.

AC sich zu dem großen Theile AF verhält/ wie der große Theil AF zu dem kleinen FC/ oder daß $AF^2 = AC$ in FC.

Auflösung.

Es sey $AC = a$/ $AF = x$/ so ist $FC = a - x$ und allso $x^2 = aa - ax$.

$$x^2 + ax = a^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2 \quad (\S 79.).$$

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2$$

$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{4}a$$

Tab. I. Fig. 4. Setzet $AC = DC = a$ rechtwincklicht zusammen/ und machet $CE = \tfrac{1}{2}a$/ so ist $DE = \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2}$ (§. 167 Geom.). Machet ferner EF = DE/ so ist die Linie AC in F auf verlangete Art seciret.

Anmerckung.

155. Die alten Geometræ nennen dieses lineam media & extrema ratione secare. Man pfleget es auch divinam sectionem zu nennen/ weil (wie aus dem Euclide zu sehen) man viel aus dieser Section demonstriret hat.

Zusatz.

156. Wenn a der Radius eines Circuls ist/ so ist der grosse Theil von der Linie x die Seite des Zehen-Eckes (§. 149).

Die 60. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 6. 157. Aus dem gegebenen Umbfange AB

AB † BC † CA eines rechtwincklichten Triangels und seinem Inhalte/ die gröste Seite BC zu finden.

Auflösung.

Es sey AB † BC † CA $= a$/ BC $= x$/ der Inhalt $= bb$ so ist AC † BA $= a-x$ Nun ist $BC^2 = AC^2 + AB^2$ (§. 167. Geom.) und $AC^2 + AB^2 = (AB + BC)^2 - 2BA \cdot BC$ (§. 75). Derowegen ist auch $BC^2 = (AB + BC)^2 - 2AB \cdot BC$. Es ist aber $BC^2 = x^2$/ $(AB + BC)^2 = a^2 - 2ax + xx$/ $2AB \cdot BC = 4bb$/ weil $b^2 = \frac{1}{2} AB \cdot BC$ (§. 150 Geom.) Und demnach habet ihr

$$x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4b^2$$

$$2ax = a^2 - 4b^2$$

$$x = \frac{a^2 - 4b^2}{2a} = \frac{1}{2}a - \frac{2b^2}{a}$$

Weil $2ax = a^2 - 4b^2$/ so ist $2a : a + 2b = a - 2b : x$ (§. 102. Arithm.). Derowegen dörfet ihr nur zu dem doppelten Umbfange ($2a$)/ der Summe des Umbfanges und der doppelten Seite des Qvadrates / welches dem Inhalt des Triangels gleich ist/ und der Differentz dieser beyden Linien/ die vierdte Proportional-Linie suchen (§. 181. Geom.)

Anmerckung.

158. Weil alle Flächen durch das Qvadrat ausgemessen werden (§. 144 Geom.); so giebet man in

Geometrischen Aufgaben jederzeit die Fläche durch eine Linie/ deren Qvadrat ihr gleich ist.

Die 61. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 7. 159. Aus der gegebenen Grundlinie BC und den beyden Winckeln an derselben B und C/ die Höhe AD zu finden.

Auflösung.

Es sey BC = a/ AD = x. Weil bey D rechte Winckel sind / so wisset ihr auch die Winckel BAD und DAC (§. 96 Geom.) Es sey der Sinus des Winckels ABD = t/ der Sinus des Winckels BAD = r/ der Sinus des Winckels DAC = q/ der Sinus des Winckels ACD = p/ so ist $t:r = x:$ BD und $p:q = x:$ DC/ (§. 34 Trigon.) folgends BD = $rx:t$ und DC = $qx:p$. Derowegen weil BD † DC = BC/ so habet ihr

$$(rx:t) \dagger (qx:p) = a$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; t$$
$$rx \dagger tqx:p = at$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$prx \dagger tqx\ p = at$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; p$$
$$prx \dagger tqx = apt$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; pr \dagger tq$$
$$x = apt:(pr \dagger tq)$$

Anders.

Wenn ihr AD als den Sinum totum ansehet/ so ist BD die Tangens des Winckels BAD/ und DC die Tangens des Winckels DAC

DAC (§. 6 Trigon.). Es sey der Sinus totus $= t$, die Tangentes seyn m und n, so ist $t:m = x:BD$ und $t:n = x:DC$, folgends ist $BD = nx:t$ und $DC = mx:t$ und demnach

$$a = (nx + mx):t$$

$$at = nx + mx$$

$$\overline{}\; n + m$$

$$at:(n+m) = x$$

Suchet also zu der Summe der Tangentium der beyden Winckel BAD und DAC dem Sinu Toto und der Grundlinie BC die vierdte Proportional-Zahl (§. 107 Arithm.) so kommet die Höhe des Triangels AD heraus.

Die 62. Aufgabe.

160. Aus drey gegebenen Seiten eines Triangels AB, AC und CB die Höhe AD zu finden. Tab. I. Fig. 7.

Auflösung.

Es sey $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, $BD = x$, so ist $DC = b - x$.

Weil nun $AB^2 - BD^2 = AD^2$ und $AC^2 - DC^2 = AD^2$ (§. 167 Geom.), so ist auch $AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2$, folgends

$$a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2bx$$

$$\frac{a^2 - c^2}{2b} + \tfrac{1}{2}b = x$$

Wenn ihr BD habet/ so könnet ihr (§. 167 Geom.) AD finden. Es sey z. E. $a = 5$/ $b = 3$/ AC $= 4$/ so ist $x = (25 - 16) : 6 + \frac{3}{2} = 9 : 6 + 3 : 2 = (3+3) : 2 = 6 : 2 = 3$.

Weil BD = BC/ so muß der gegebene Triangel rechtwincklicht und allso AD = AC seyn. Es sey $a = 6$/ $b = 4$/ AC $= 3$/ so ist $x = (36-9) : 8 + 2 = 27 : 8 + 2 = 5 + \frac{3}{8}$.

$AB^2 = 2304 : 64$

$BD^2 = 1849 : 64$

$AD^2 = 455 : 64$ (§. 167 Geom.)

```
  7 13
  2 35 1
 |14|41|2.1
4|55|00|00( 21 33/100  demnach ist
 |41|23|63
  4 42
```

AD = 2133 : 800.

Anmerckung.

161. Auf eine gleiche Weise könnet ihr aus drey gegebenen Seiten die Höhe des Triangels finden/ wenn er stumpfwincklicht ist.

Zusatz.

162. Derowegen könnet ihr auch aus drey gegebenen Seiten den Inhalt eines Triangels finden/ (§. 150 Geom.)

Die 63. Aufgabe.

163. Aus dem gegebenen Inhalte eines rechtwincklichten Triangels ABC, dessen drey Seiten AC, BA, DB in einer Geometrischen Progreßion sind, die Seiten selbst zufinden. Tab. I. Fig. 6.

Auflösung.

Es sey der Inhalt $= a^2$, AC $= y$ BA $= xy$ so ist CB $= x^2 y$ (§. 65 Arithm.) und dannenhero

$x^4 y^4 = x^2 y^2 + y^2$ (§. 167 Geom.) $2a^2 = xy^2$ (§. 156 Geom.)

$x^4 - x^2 = 1$

$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}$ (§. 79).

$x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$x^2 - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$

$x^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$

$x = \sqrt{(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}})}$

$2a^2 = y^2 \sqrt{(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}})}$

$\sqrt{(2a^2 : \sqrt{(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}})}} = y$

Die 64. Aufgabe.

164. Aus der gegebenen Summe der Seiten AC + AB in einem rechtwincklichten Triangel CAB und dem Perpendicul AD die Seiten zufinden. Tab. I. Fig. 6.

Auflösung.

Es sey AB † AC = a/ AB - BC = y/ BC = x AD = b/ so ist AB = $\frac{1}{2}(a \dagger y)$/ AC = $\frac{1}{2}(a - y)$/ folgends

$x^2 = \frac{1}{2}(aa \dagger yy)$ (§. 167 Geom.)

$2x^2 = aa + yy$

$2x^2 - aa = yy$

BA : DA = BC : AC

$\frac{1}{2}(a \dagger y) : b = x : \frac{1}{2}(a - y)$

$\frac{1}{4}(aa - yy) = bx$

$aa - 4bx = yy$

Derowegen $2x^2 - aa = aa - 4bx$

$x^2 - 2bx = aa$

$x^2 - 2bx \dagger bb = aa \dagger bb$ (§. 79)

$x = -b \dagger \sqrt{(aa \dagger bb)}$

Wenn ihr b auf a perpendicular aufrichtet/ so ist die Hypotenuse $\sqrt{(bb \dagger aa)}$/ derowegen wenn ihr von dieser die Linie b abschneidet/ so bleibet die Hypotenuse eures Triangels x übrig.

Die 65. Aufgabe.

165. Aus dem gegebenen Diameter des Circuls DE oder der Sehne GF und der Tangente AB die Secantem AE/ oder AF zufinden.

Auflösung.

1. Wenn die Secans AE durch den Mittelpunct C gehet/ so sey

$AB = a$		$AD = x$
$BC = b$	so ist	$AC = b + x$
$DE = 2b$		$AE = 2b + x$

folgends $bb + 2bx + x^2 = aa + bb$ (§. 167. Geom.)

$$x = \sqrt{(aa + bb)} - b$$

2. Wenn die Secans AF nicht durch den Mittelpunct C gehet/ so sey über dieses $GA = y$ und $GH =$ ($\frac{1}{2}$ GF §. 118 Geom. weil CH auf GF perpendicular stehet) $= c$/ so ist $AH = y + z$ und $AF = y + 2c$ folgends $(CH)^2 = bb - cc$ und $(AC)^2 = bb - cc + y^2 + 2cy + cc = bb + y^2 + 2cy$

Derowegen ist

$$bb + y^2 + 2cy = bb + aa$$

$$y^2 + 2cy = aa$$

$$y^2 + 2cy + cc = aa + cc$$

$$y = \sqrt{(aa + cc)} - c$$

Also ist $AF = \sqrt{(aa + cc)} + c$.

Zusatz.

166. Weil $x^2 + 2bx = aa$ und $y^2 + 2cy = aa$/ so ist AD. AE $= (AB)^2$/ ingleichen AG. AF $= (AB)^2$/ folgends auch

AD.

AD. AE = AG. AF und demnach AE. AF = AG: AD/ welches alles in der Trigonometrie (§.42) schon auf andere Art erwiesen worden.

Die 68. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 9. 167. **Aus dem gegebenen Sinu eines Winckels den Sinum des doppelten/ dreyfachen/ vierfachen ꝛc. Winckels zu finden.**

Auflösung.

Es sey der einfache Winckel KAE. Nehmet AB für den Sinum Totum an und macht AB = BC = DC = DE = EK/ so ist BF der Sinus des Winckels A und AF = FC (§. 103 Geom.) der Sinus Complementi, ferner GBC = 2 BAC (§.100 Geom.) DCE = CDA † CAD (§. cit.) = 3 CAD/ KDE = DEA † KAE (§. cit.) = 4 KAD u. s. w. Folgends ist GC der Sinus des doppelten/ DH des dreyfachen/ EI des vierfachen Winckels A.

Es sey AB = r/ BF = b/ AF = c.

AB : BF = AC : GC (§. 182 Geom.)
r b $2c$ $2bc:r$

AB: AF = AC : AG
r c $2c$ $2cc:r$

Derowegen ist BG = $2cc:r - r = (2cc - rr):r$ = (weil $r^2 = b^2 + c^2$) $(2cc - b^2 - c^2):r = (c^2-b^2):r$ folgends AD = $(3c^2 - b^2):r$.

AB:

$AB : BF = AD : DH$
$r \quad b \quad (3c^2 - b^2):r \quad 3bc^2 - b^3,: r^2$
$AB : AF = AD : AH$
$r \quad c \quad 3c^2 - b^2,:r \quad 3c^3 - b^2c,: r^2$

Derowegen ist $CH = 3c^3 - b^2c,: r^2 - 2c = 3c^3 - b^2c - 2cr^2,: r^2 =$ (weil $r^2 = c^2 - b^2$) $3c^3 - b^2c - 2c^3 - 2b^2c,: r^2 = c^3 - 3b^2c,: r^2$, folgends $AE = 3c^3 - b^2c,: r^2 + c^3 - 3b^2c : r^2 = 4c^3 - 4b^2c,: r^2.$

$AB : BF = AE : EI$
$r \quad b \quad 4c^3 - 4b^2c,:r^2 \quad 4bc^3 - 4b^3c,:r^3$
$AB : AF = AE : AI$
$r \quad c \quad 4c^3 - 4b^2c,:r^2 \quad 4c^4 - 4b^2c^2,:r^3$

Derowegen ist $DI = 4c^4 - 4b^2c^2,: r^3 - 3c^2 + b^2,: r = 4c^4 - 4b^2c^2 - 3c^2 - 3c\,r^2 + b^2r^2,: r^3 = 4c^4 - 4b^2c^2 - 3b^2c^2 - 3c^4 + b^4 + b^2c^2,: r^3 = c^4 - 6b^2c^2 + b^4,: r^3.$

Wenn demnach der Sinus totus r, der Sinus des einfachen Winckels b, und sein Sinus complementi c ist, so ist der Sinus

des zwiefachen $2bc : r$
des dreyfachen $3bc^2 - b^3,: r^2$
des vierfachen $4bc^3 - 4b^3c,: r^3$
des fünffachen $5bc^4 - 18b^3c^2 + b^5,: r^4$
des sechsfachen $6bc^5 - 20b^3c^3 + 6b^5c,: r^5$

Hingegen der Sinus Complementi

des zwiefachen $cc - bb,: r$
des dreyfachen $c^3 - 3b^2c,: r^2$
des vierfachen $c^4 - 6b^2c^2 + b^4,: r^3$
des fünffachen $c^5 - 10b^2c^3 + 5b^4c,: r^4$
des sechsfachen $c^6 - 15b^2c + 15b^4c^2 - b^6,: r^5$

Zu-

Zusatz.

168. Also könnet ihr auch leicht aus der Tangente des einfachen Winckels/ die Tangentes des zwiefachen/ dreyfachen/ vierfachen 2c. finden (§. 18 Trigon.). Denn es sey der einfache $= t = br : c$ (§. cit.) so ist der zwiefache $2bcr, : cc - bb = 2t :, c^2 - b^2$.

Anmerckung.

169. Ihr könnet auch die Tangentes suchen/ ohne daß ihr nöthig habet die Sinus zu wissen/ wie in der folgenden Aufgabe gezeiget wird. Ihr habet aber dazu folgenden Satz nöthig:

Wenn der Winckel CAB durch die Linie EA in zwey gleiche Theile getheilet wird/ so verhält sich die eine Seite AB zu dem ihr anliegenden Theile der Grund-Linie BE wie die Seite AC zu dem Theile EC/ so an ihr lieget.

Beweiß.

Verlängert BA in D/ biß AD = AC und ziehet die Linie CD. Weil der Winckel CAB = ACD + ADC (§. 100 Geom.) und CA = AD; so ist auch ACD = ADC (§. 101 Geom.)/ folgends ACD = $\frac{1}{2}$ CAB = CAE. Demnach ist EA mit CD parallel (§. 92 Geom.)/ und daher BA: BE = AD (= AC) : EC (§. 197 Geom.). W. Z. E.

Zusatz.

170. Derowegen verhält sich auch BA:

AC

AC = BE : EC/ folgends BA + AC : AC = BC : EC (§.130).

Die 69. Aufgabe.

171. Aus dem Tangente und Secante des einfachen Winckels die Tangentes und Secantes des zweyfachen/ dreyfachen/ vierfachen ꝛc. zufinden. Tab. I. Fig. 8.

Auflösung.

Nehmet AB für den Sinum totum an/ so ist BC die Tangens des einfachen Winckels CAB/ BD die Tangens des zwiefachen DAB u. s. w.

Es sey AB $= a$/ BC $= b$/ ED $= x$/ so ist CD $= x - b$; $(CD)^2 = x^2 - 2bx + b^2$/ $(AD)^2 = aa + xx$. Nun ist AB : AD = BC : CD (§.170)/ und daher $(AB)^2 : (AD)^2 = (BC)^2 : (CD)^2$ (§.130)/ das ist/

$$a^2 : a^2 + x^2 = b^2 : x^2 - 2bx + b^2$$

$$a^2 b^2 + b^2 x^2 = a^2 x^2 - 2a^2 bx + a^2 b^2$$

$$2a^2 x = a^2 x^2 - b^2 x^2$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; a^2 x - b^2 x$$

$$2a^2 b : a^2 - b^2 = x$$

Derowegen ist CD $= x - b = (2a^2 b,:a^2 - b^2) - b = 2a^2 b - a^2 b + b^3,:, a^2 - b^2 = a^2 b + b^3,:, a^2 - b^2$.

Die Secantem AD findet ihr nun allso.

BC : CD = AB : AD (§.170).

$b : (a^2b + b^3, :, a^2-b^2) = a : (a^3 + ab^2, :, a^2 - b^2)$.

Oder wenn ihr die Secantem des einfachen Winckels AC $= \sqrt{(a^2 + b^2)} = c$ setzet / so ist AD $= ac^2 :, a^2 - b^2$.

Auf gleiche Art wird die Tangens des dreyfachen Winckels BE $= 3a^2b - b^3, :, a^2 - 3b^2$ und die Secans AE $= c^3 :, a^2 - 3b^2$ gefunden/ u. s. w.

Die 70. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 6.

172. Aus dem gegebenen Inhalte eines rechtwincklichten Triangels ABC und dem Winckel B die Seiten AB und BC zu finden.

Auflösung.

Es sey der Inhalt $= b^2$ AB $= x$
der Sinus Totus $= r$ so ist:
die Tangens B $= t$ $r : t = x :$ AC (§. 6 Trig.)

daher AC $= tx : r$

Folgends $tx^2 : 2r = b^2$

$x^2 = (2b^2r : t)$

$x = \sqrt{(2b^2r : t)}$

Nehmet auf den einen Schenckel AI des gegebenen Winckels KAI nach Belieben AB für r an und richtet in B die perpendicular-Linie DB auf/ diese ist $= t$ (§. 6 Trig). Traget DB aus A in C und b aus B in E. Ziehet FE mit CB parallel/ so ist CF $= bt : r$ (§. 181. Geom.).

Machet

Machet ferner FH = $2b$ / und suchet zwischen CF und FH die mittlere Proportional-Linie FG (§. 195. Geom.) diese ist = x.

Die 71. Aufgabe.

173. **Einen Circul zu finden / der so groß ist als die Fläche eines gegebenen Cylinders.**

Auflösung.

Es sey der Diameter des Cylinders = d / seine Peripherie = p / die Höhe = a so ist die Fläche = ap (§. 27. 45 Geom.) Es sey ferner der Diameter des Circuls = x / so ist $d : p = x : (px : d)$. Und demnach die Peripherie des Circuls $px : d$ / folgends seine Fläche $px^2 : 4d$ (§. 163 Geom.) Derowegen ist $px^2 : 4d = ap$

$$x^2 = 4ad$$

$$x = \sqrt{4ad} \text{ oder } \tfrac{1}{2}x = \sqrt{ad}$$

Der halbe Diameter des verlangten Circuls ist die mittlere Proportional-Linie zwischen der Höhe und dem Diameter des Cylinders.

Die 72. Aufgabe.

174. **Den Diameter und die Höhe eines Cylinders zufinden / dessen Fläche einem gegebenen Circul gleich ist.**

Auflösung.

Es sey der Diameter des Circuls $= r$, die Peripherie $= p$, die Höhe des Cylinders $= x$, sein Diameter $= y$. So ist seine Peripherie $= py : r$, folgends

$$pyx : r = \tfrac{1}{4}pr$$

$$4yx = r^2$$

$$x = r^2 : 4y$$

oder $y = r^2 : 4x$

Ihr könnet allso entweder den Diameter, oder die Höhe nach belieben annehmen.

Die 73. Aufgabe.

175. **Aus der gegebenen Verhältnis der Höhe eines Cylinders zu seinem Diameter und dem Diameter eines Circuls, der seiner Fläche gleich ist, die Höhe des Cylinders und seinen Diameter zufinden.**

Auflösung.

Es sey die gegebene Verhältnis $m : n$, der Diameter des Circuls $= d$, seine Peripherie $= p$, die Höhe des Cylinders $= x$, so ist sein Diameter $= nx : m$ und seine Peripherie $= npx : md$, folgends

$$npx^2 : md = \tfrac{1}{4}pd$$

$$x^2 = md^2 : 4n$$

$$x = V(md^2 : 4n)$$

Die

Die 74. Aufgabe.

176. Aus dem gegebenen Inhalte eines Cylinders und der Verhältnis, den seine Höhe zu seinem Diameter hat, die Höhe und den Diameter zu finden.

Auflösung.

Es sey der Inhalt des Cylinders $= c^3$, die gegebene Verhältnis $= m : n$, die Höhe $= x$, so ist der Diameter $= nx : m$ seine Peripherie $314\, nx : 100m$ (§. 161 Geometr.), folgends seine Grundfläche $314 n^2 x^2 : 400m^2$ (§. 163 Geom.) und daher

$$314n^2 x^3 : 400m^2 = c^3$$

$$x^3 = 400m^2 c^3 : 314n^2$$

$$x = c\sqrt[3]{(400m^2 : 314n^2)}$$

Die 75. Aufgabe.

177. Aus dem gegebenen Inhalte einer Kugel ihren Diameter zu finden.

Auflösung.

Es sey der Inhalt $= a^3$, der Diameter $= x$, so ist $300 : 157 = x^3 : a^3$ (§. 222 Geom.)

$$157x^3 = 300a^3$$

$$x^3 = 300a^3 : 157$$

$$x = \sqrt[3]{(300a^3 : 157)}$$

Die 76. Aufgabe.

178. Aus der gegebenen Fläche einer Kugel ihren Diameter zufinden.

Auflösung.

Es sey der Diameter $= x$ / die Fläche $= a^2$ so ist die Peripherie des grösten Circuls $100x : 314$ (§. 161 Geom.) folgends

$$a^2 = 100x^2 : 314 \text{ (§. 220 Geom.)}$$

$$314a^2 : 100 = x^2$$

$$\sqrt{(314a^2 : 100)} = x$$

Die 77. Aufgabe.

179. Aus der gegebenen Fläche einer Kugel ihren Cörperlichen Inhalt zu finden.

Auflösung.

Es sey der Cörperliche Inhalt $= x$ / die Fläche $= a^2$ / so ist der Diameter $= \sqrt{(314a^2 : 100)}$ §. 178 / folgends (§. 221 Geom.)

$$\tfrac{1}{6} a^3 \sqrt{(314 : 100)} = x$$

$$a^3 \sqrt{314} : 60 = x$$

Die 78. Aufgabe.

180. Aus dem gegebenen Diameter einer Kugel und der Höhe eines Cylinders / der ihr gleich ist / den Diameter des Cylinders zu finden.

Auf-

Auflösung.

Es sey der Diameter der Kugel $= d$, die Höhe des Cylinders $= a$, ihr Diameter $= x$, so ist ihr Inhalt $= 157 d^3 : 300$ (§. 224 Geom.) der Inhalt des Cylinders $314 ax^2 : 400$ (§. 206 Geom.) und demnach

$$157 d^3 : 300 = 314 ax^2 : 400.$$

$$400 . 157 d^3 : 300 . 314 a = x^2$$

$$\sqrt{(2d^3 : 3a)} = x.$$

Die 79. Aufgabe.

181. **Aus dem gegebenen Diameter eines Coni und der Höhe den Diameter eines Cylinders zu finden, der ihm der Höhe und dem Inhalte nach gleich ist.**

Auflösung.

Es sey der Diameter des Coni $= d$, die Höhe $= a$, der Diameter des Cylinders $= x$, so ist der Inhalt des Coni $= 785 da^2 : 3000$ (§. 213 Geom.), des Cylinders aber $785 adx^2 : 1000$ (§. 206 Geom.). Derowegen ist (§. 212 Geom.)

$$785 adx^2 : 1000 = 785 ad^2 : 3000$$

$$x^2 = \tfrac{1}{3} d^2$$

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{3}} d$$

Die 80. Aufgabe.

182. Aus dem gegebenen Diameter eines Coni und seiner Höhe / den Diameter einer Kugel zu finden / die ihm gleich ist.

Auflösung.

Es sey der Diameter des Coni $= d$ / die Höhe $= a$ / der Diameter der Kugel $= x$ so ist der Inhalt des Coni $= 785ad^2 : 3000$ (§. 213 Geom.) hingegen der Inhalt der Kugel $157x^3 : 300$ (§. 216 Geom.) Derowegen ist

$$157x^3 : 300 = 785ad^2 : 3000$$

$$x^3 = 785ad^2 : 1570$$

$$x = \sqrt[3]{(785ad^2 : 1570)}$$

Die 81. Aufgabe.

183. Den Inhalt eines abgekürtzten Coni zufinden.

Tab. I. Fig. 13.

Auflösung.

Es sey AB $= r$ / GF $= b$ / CD $= c$ / EF $= x$ / so ist EG $= b + x$ / der Inhalt des Coni AEB $= 785\, r^2 (b + x) : 3000$ und des Coni CED $= 785\, c^2 x : 3000$ / folgends der abgekürtzte Conus ACDB $= (785\, r^2 b + 785 r^2 x - 785\, c^2 x) : 3000$. Nun ist

AH : HC = AG : GE (§. 177 Geom.)

$$(r - c) : 2\tfrac{1}{2} r = b : b + x$$

Dem-

demnach $br = br - bc + rx - cx$

$$bc : (r - c) = x$$

Setzet diesen Werth von x in seine Stelle in dem Werthe des abgekürtzten Coni, so bekommet ihr für denselben $(785 r^2 b + (785 r^2 bc - 785 bc^3) : (r - c)) : 3000 = (785 r^3 b - 785 r^2 bc + 785 r^2 bc - 785 bc^3) : (3000 r - 3000 c) = 785 b (r^3 - c^3) : 3000 (r - c)$.

Anmerckung.

184. Bißher habe ich in leichten Geometrischen Exempeln den Nutzen der Algebra gezeiget: nun aber wird es Zeit seyn/ daß ich darthue/ wie man in der höheren Geometrie mit sonderbahrem Vortheile sich derselben bediene. Es handelt aber die höhere Geometrie von den krummen Linien. Derowegen sol ich zeigen/ wie man durch Hülfe der Algebra die Eigenschaften der krummen Linien finden kan. Zwar dienet darzu hauptsächlich die Differential- und Integral-Rechnung/ von der im anderen Theile gehandelt werden sol: allein man kan auch durch die gemeine Algebra gar viel ausrichten. Damit ihr aber verstehen möget/ was hinfort beygebracht werden sol; so muß überhaupt etwas von den krummen Linien angeführet werden. Bildet euch aber nicht ein/ als wenn diese Betrachtung gantz fruchtloß wäre. Vielmehr versichert euch/ daß sie denenjenigen sehr zustatten kommet/ welche die Geheimnisse der Natur und Kunst gnauer als andere einzusehen belieben. Ich würde jetzt vergeblich reden/ wenn ich einen weitläuftigen Beweis hiervon führen wollte. Darumb gedultet euch so lange/ biß in dem dritten Theile durch viele Exempel meine Rede bestetiget wird. Hier mercket nur überhaupt/ daß man gewohnet ist

die krummen Linien durch Algebraische Gleichungen zu erklähren/ welche die relation gewisser geraden Linien/ die man innerhalb denselben ziehen kan/ gegen einander exprimiren. Z. E. Es sey AHB ein halber Circul und in demselben PM auf dem Diameter AB perpendicular. Setzet AB = a/ AP = x/ so ist PB = $a-x$. Es sey ferner PM = y/ so ist beständig $y^2 = ax - xx$ (§. 195 Geom. & §. 126 Algebr.). Derowegen drucket diese Gleichung die Relation aus/ welche die Linie PM zu AP in allen Puncten der Peripherie AHB hat. Und darumb nennet man sie die Erklährung des Circuls. Gleichwie nun aber alles/ was von der Sache erkandt werden kan/ aus ihrer Erklährung hergeleitet wird (§. 27 Meth. Math.) so pfleget man auch aus dergleichen Gleichungen durch die Algebra die Eigenschaften der krummen Linien herzuleiten.

Tab. I. Fig. 14.

Von den krummen Linien.

Die 11. Erklährung.

Tab. II. Fig. 15. 185. Die Linie AX/ welche alle gerade Linien MM/ die mit einander innerhalb einer krummen Linie parallel gezogen werden/ in zwey gleiche Theile PM und PM theilet/ wird der Diameter/ und insonderheit die Axe genennet/ wenn sie mit eben den Linien einen rechten Winckel macht.

Die 12. Erklährung.

186. Die Linien MM werden die Ordinaten; ihre Helften aber PM die Semiordinaten genennet.

Die

Die 13. Erklährung.

187. Hingegen die Abscisse AP ist das Stücke des Diameters oder der Axe/ welches die Ordinaten MM abschneiden.

Die 14. Erklährung.

188. Der Scheitel der krummen Linie ist der Punct A/ darinnen sich die Axe AX endet.

Die 15. Erklährung.

189. Eine Algebraische Linie wird genennet/ deren Natur durch eine Algebraische Æquation sich erklähren läst.

Die 1. Anmerckung.

190. Durch die Algebraischen Gleichungen verstehen wir diejenigen / die einerley Grad haben in allen Puncten der krummen Linie. Dergleichen ist die Æquation des Circuls $y^2 = ax - x^2$. Es ist aber wohl zu mercken/ daß für eine krumme Linie öfters verschiedene Æquationen gefunden werden/ gleich wie man verschiedene Erklährungen von ihnen geben kan/ wenn sie mehr als eine eigenthümliche Eigenschaft haben. Z. E. Es sey im Circul der halbe Diameter EC $= r$/ PC $= x$/ PM $= y$/ so ist die Æquation, welche die Natur des Circuls erklähret $r^2 - x^2 = y^2$.

Die 2. Anmerckung.

191: Man nennet insgemein mit dem *des Cartes* die Algebraischen Linien/ **Geometrische Linien**: allein wir sind bey der Benennung des

Herrn von Leibnitz geblieben / mit welchem auch der große Engelländische Geometra *Newton* übereinstimmet / welcher (in Arithm. Univ. p. 280.) wohl erinnert / daß nicht die Æquation Ursache sey / warumb man eine krumme Linie zu Auflösung der Fragen in die Geometrie nehmen sol / sondern es solle vielmehr darumb geschehen / weil sie sich leicht beschreiben läst.

Die 16. Erklährung.

192. **Eine Transcendentische Linie wird genennet / deren Natur durch keine Algebraische Æquation sich erklähren läst / unerachtet man sie durch eine Transcendentische erklähren kan.**

Die 1. Anmerckung.

193. Die Transcendentischen Æquationen haben keinen determinirten Grad / sondern der Exponente in den Dignitäten der Glieder ist veränderlich. Diese hat der Herr von Leibnitz zuerst eingeführet.

Die 2. Anmerckung.

194. Insgemein nennet man die Transcendentischen Linien **Mechanische Linien** abermals mit dem *des Cartes*, und wirft solchergestalt viel Linien aus der Geometrie / die sich leicht beschreiben laßen: welches wir mit den beyden grösten Geometris unserer Zeiten / dem Herrn von Leibnitz und dem Herrn *Newton* mit Recht mißbilligen / weil man zur Auflösung einer Aufgabe diejenige Linie für anderen erwehlen sol / die sich leichte beschreiben läst.

Die 17. Erklährung.

195. **Alle Algebraische Linien werden zu einem Geschlechte gerechnet / da die Glie-**

Glieder der Æquationen auf gleiche Dimensionen steigen. Da nun die Æquation für eine gerade Linie allein eine Dimension haben kan; so nennet man eine Linie von dem ersten Geschlechte/ wenn die Glieder der Æquation zwey Dimensionen haben: sind derselben drey/ so ist es eine Linie von dem andern Geschlechte: sind ihrer viere/ eine Linie von dem dritten Geschlechte u. s. w.

Anmerckung.

196. Die Æquation für den Circul ist $y^2 = ax - x^2$/ oder auch $a^2 - x^2 = y^2$. Demnach ist der Circul eine Linie von dem ersten Geschlechte. Wiederumb wenn $ax = y^2$ die Natur einer krummen Linie erklähret; so ist dieselbe abermal eine Linie von dem ersten Geschlechte. Hingegen wenn die Erklährung der krummen Linie $a^2x = y^3$ ist/ so ist sie eine Linie von dem andern Geschlechte.

Die 18. Erklährung.

197. Alle Algebraische Linien rechnen wir zu einer Familie/ in deren Gleichungen alle Glieder bis auf die Exponenten der Dignitäten miteinander überein kommen.

Die 1. Anmerckung.

198. Demnach gehören die krummen Linien/ deren Natur durch die Gleichungen $ax = y^2$/ $a^2x = y^3$/ $a^3 x = y^4$ erklähret wird/ zu einer Familie.

Die

Der 1. Zusatz.

199. Die krummen Linien können alle unter eine Gleichung gebracht werden / die zu einer Familie gehören / wenn man nemlich für die determinirte Exponenten undeterminirte setzet.

Die 2. Anmerckung.

200. Solchergestalt sind alle krumme Linien / die sich durch $ax = y^2$ / $a^2x = y^3$ / $a^3x = y^4$ u. s. w. erklähren laßen / unter dieser Gleichung enthalten $a^{m-1}x = y^m$. Ihr müsset aber dergleichen Æquationen nicht mit den Transcendentischen verwirren. Denn unerachtet auch diese keine determinirte Exponenten haben / so sind sie doch darinnen unterschieden / daß in einem jeden Puncte der krummen Linien eine besondere Zahl in ihre Stelle gesetzt werden muß / dahingegen die gegenwärtige Gleichungen sich auf alle Puncte der krummen Linien schicken / die durch sie erklähret werden.

Die 3. Anmerckung.

201. Solchergestalt könnet ihr alle Algebraische Linien für eine grosse Familie rechnen / die aus unendlich kleineren bestehet / deren iede unendliche Geschlechter hat. Denn weil in allen Gleichungen / dadurch die Natur der krummen Linien erklähret wird / entweder eine gewisse Dignität der Abscisse und Ordinate bloß durch bekandte Grössen / oder zugleich verschiedene Qvantitäten derselben in einander / oder auch für einige Glieder lauter bekandte Größen ineinander multipliciret werden / alle Gleichungen aber sich auf 0 resolviren / wenn man alle Glieder auf eine Seite setzet (als an stat $ax = y^2$ könnet ihr sagen $y^2 - ax = 0$); so wird eine General-Æquation für alle Algebraische Linien seyn $ay^m + bx^n + cy^r x^s + f = 0$. Man

setzet

setzet überall das Zeichen †/ weil die Zeichen auf gar viel Arten verändert werden können.

Die 4. Anmerckung.

202. Diese Eintheilung der Linien in ihre Geschlechter und Familien hat ihren Nutzen: und dienet die letztere sonderlich dazu/ daß wir dasjenige/ was vielen Linien gemein ist/ auf einmal erkennen. Die erstere Eintheilung ist zu dem Ende aufgebracht worden/ daß man eine Wahl der Linien anstellen könte/ wenn man einige zu Auflösung einer Aufgabe aussuchen sol: wovon ich an seinem Orte reden wil.

Die 5. Anmerckung.

203. Unter dem krummen Linien sind sonderlich diejenigen für anderen berühmt/ welche aus geschickter Zerschneidung eines Kegels oder Coni entstehen/ und daher von den Alten *Sectiones Conicæ* oder **Kegelschnitte** genennet worden. Denn weil die Alten sie nebst dem Circul allein in die Geometrie nahmen; haben sie auch viel von ihren Eigenschaften geschrieben / und die neueren haben noch ein mehreres dazu gefunden. Derowegen wollen auch wir ihre vornehmste Eigenschaften durch Algebraische Rechnungen untersuchen/ wiewol wir sie anfangs nicht als Kegelschnitte betrachten wollen/sondern sie durch Æquationen erklähren. Es sind aber dieser Linien drey/nemlich die *Parabola*, die *Ellipsis* und die *Hyperbola*. Mercket aber hier einmal für alle mal daß wir beständig die Abscisse x und die halbe Ordinate y nennen wollen.

Die 19. Erklährung.

202. Die PARABOLA ist eine Linie in welcher $ax = y^2$/ das ist/ in welcher das Qvadrat der halben Ordinate dem Rectangulo aus der Abscisse in eine beständige

dige Linie gleich ist/ die der **Parameter** genennet wird.

Der 1. Zusatz.

205. Derowegen ist in der Parabel $a = y^2 : x$ / das ist / der Parameter ist die dritte Proportional-Linie zu einer jeden Ascisse und der ihr zugehörigen halben Ordinate.

Der 2. Zusatz.

206. Es ist ferner $\sqrt{ax} = y$ / das ist / die halbe Ordinate ist die mittlere Proportional-Linie zwischen dem Parameter und der ihr zugehörigen Abscisse.

Der 3. Zusatz.

Tab. II. Fig. 16. 207. Solchergestalt könnet ihr eine Parabel beschreiben / wenn euch ihr Parameter gegeben wird. Denn es sey AB der gegebene Parameter. Richtet in B eine Perpendicular-Linie BC auf. Setzet den Zirckel nach Belieben auf der Linie AD ein / thut ihn auf bis A und beschreibet die Bogen I1 / II2 / III3 u. s. w. so sind B1 / B2 / B3 &c. die mittlere Proportional-Linien zwischen AB und BI / BII / BIII &c. (§. 195 Geom.). Derowegen da AB der Parameter ist / so sind BI / BII / BIII &c. die Abscißen / hingegen B1 / B2 / B3 &c. die halben Ordinaten. Wenn ihr nun durch I / II / III / &c. Linien mit BC parallel ziehet / und aus I in 1 / 2 / 3 &c. die Linien B1 / B2 / B3 &c. traget; so könnet ihr durch die Puncte 1. 2. 3. &c. die Parabel beschreiben.

Die

Der 4. Zusatz.

208. Ihr könnet auch in einer jeden Parabel einen verlangten Punct Geometrisch determiniren. Z. E. Ihr wolltet wißen / ob M recht in der Parabel sey. Lasset aus M in P ein Perpendicul fallen / und traget aus P in A den Parameter. Werfet über BA einen halben Circul / wenn er durch den Punct M gehet / so ist er in der Parabel (§. 195 Geom. & §. 206 Algebr.).

Der 5. Zusatz.

209. Endlich ist $x = y^2 : a$ / das ist / die Abscisse ist die dritte Proportional-Linie zu dem Parameter und der halben Ordinate.

Der 6. Zusatz.

210. Die erklährete Parabel (welche man die Apollonische zu nennen pfleget / weil Apollonius Pergæus unter den Alten viel von ihr geschrieben) ist eine Linie von dem ersten Geschlechte (§. 195).

Der 7. Zusatz

211. Wenn ihr demnach $a^2x = y^3$ / $a^3x = y^4$ / $a^4x = y^5$ &c. setzet / so habet ihr Parabeln von dem andern / dritten / vierdten &c. Geschlechte. Und daher erklähret $a^{m-1}x = y^m$ eine gantze Familie unendlicher Geschlechter der Parabeln / in welchen allen $a = \sqrt[m-1]{(y^m : x)}$ / $y = \sqrt[m]{a^{m-1}x}$ / und $x = y^m : a^{m-1}$

An-

Anmerckung.

212. Ihr köntet auch setzen $ax^2 = y^3$ / $ax^3 = y^4$ u. s. w unendlich fort/ oder überhaupt $ax^{m-1} = y^m$. So käme eine neue Familie unendlicher Geschlechter von krummen Linien heraus/ welche von einigen Semiparabolæ genennet werden. Wolltet ihr die Familien der halben Parabeln und die vorige der Parabeln unter eine Gemeinschaft bringen/ so dörftet ihr nur setzen $a^n x^r = y^m$ / unter welcher zugleich noch viele andere begriffen wären als $a^2 x^3 = y^5$. Einige nennen die Parabeln von den höheren Geschlechtern auch *Paraboloides*, ingleichen *Paraboliformes*. Eine allgemeine Methode alle Paraboloides zu beschreiben hat Bartholomæus Intieri gegeben in Aditu ad nova arcana Gemetrica detegenda (Beneventi 1703 in 4) epist. 1. p. 3 & seqq. die ihr auch in den Leipziger Actis 1704. p. 272 findet. Sie hat aber diese Beschweerlichkeit/ daß keine von den höheren beschrieben werden kan/ man habe denn vorhero alle niedrigeren beschrieben.

Die 20. Erklährung.

Tab. II. Fig. 17. **213. Der Brenn-Punct (Focus) ist der Punct in der Axe/ wo der Parameter die Ordinate abgiebet.**

Die 82. Aufgabe.

214. Die Distantz des Brenn-Punctes F von der Scheitel zu finden.

Auflösung.

Es sey AF $= x$/ der Parameter $= a$/ so ist FR $= \frac{1}{2}a$ (§. 214)/ folgends

$$\frac{1}{4}a^2 = ax$$

$$\frac{1}{4}a = x$$

ehr-

Lehrsatz.

In der Parabel ist die Distantz des Brenn-Punctes F von der Scheitel A dem vierdten Theile des Parameters gleich. Tab. II. Fig. 17.

Die 83. Aufgabe.

215. Die Verhältnis zu finden / welche die Ordinaten gegen einander haben.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= a$ / AP $= x$ / Ap $= v$ / PM $= y$ / pm $= z$ / so ist $y^2 = ax$ / und $z^2 = vx$ (§. 204) / folgends $y^2 : z^2 = ax : av = x : v$ (§. 130). Demnach ist $(PM)^2 : (pm)^2 = AP : Ap$.

Lehrsatz.

In der Parabel verhalten sich die Qvadrate der Ordinaten wie die Abscissen.

Die 84. Aufgabe.

216. Die Grösse des Rectanguli aus der Summe zweyer halben Ordinaten PM + pm in ihre Differentz mR zu finden.

Auflösung.

$$\left.\begin{array}{r} PM + pm = \sqrt{av} + \sqrt{ax} \\ mR = \sqrt{av} - \sqrt{ax} \end{array}\right\} \text{§. 215}$$

$$(PM + pm)\, mR = av - ax = a, v-x$$

Lehrsatz.

Das Rectangulum aus der Summe

zweyer halben Ordinaten in ihre Differentz ist gleich dem Rectangulo aus dem Parameter in die Differentz der zugehörigen Abscissen.

Zusatz.

217. Derowegen verhält sich der Parameter zu der Summe zweyer halben Ordinaten, wie ihre Differentz zu der Differentz der Abscissen.

Die 85. Aufgabe.

218. Die grösse des Rectanguli aus der halben Ordinate in die Abscisse zufinden.

Auflösung.

Weil $PM = \sqrt{ax}$: so ist $PM. AP = x\sqrt{ax} = \sqrt{ax^3}$ (§. 65) $= \sqrt{x^2y^2}$.

Lehrsatz.

In der Parabel verhält sich das Qvadrat der halben Ordinate zu dem Rectangulo aus der Abscisse in die halbe Ordinate, wie dieses Rectangulum zu dem Qvadrate der Abscisse.

Die 86. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 17. 219. Die Verhältnis der Sehnen AM und Am zufinden, welche aus der Scheitel der Parabel A gegen das Ende der Ordinate M gezogen werden.

Auflösung.

Weil $(PM)^2 = ax$, $(AP)^2 = x^2$ so ist

$(\text{AM})^2 = ax + x^2$ (§. 167 Geom.). Wiederumb wenn ihr Ap $= v$ setzet; so ist $(\text{Am})^2 = av + v^2$. Derowegen ist

$$(\text{AM})^2 : (\text{Am})^2 = ax + x^2 : av + v^2$$
$$= a + x, x : a + v, v$$

Lehrsatz.

Die Qvadrate der Sehnen AM und Am verhalten sich in der Parabel wie die Rectangula aus den Abscissen in die Aggregate der Abscissen und des Parameters.

Die 87. Aufgabe.

220. Die Grösse der Linie FM zu finden, die aus dem Brenn-Puncte an das Ende einer Ordinate M gezogen wird. Tab. II. Fig. 17.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= a$, AP $= x$, so ist AF $= \frac{1}{4}a$ (§. 214), PF $= x - \frac{1}{4}a$, folgends

$$(\text{PF})^2 = x^2 - \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$(\text{PM})^2 = ax \quad (§. 204)$$

$$(\text{FM})^2 = x^2 + \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{4}a^2 \ (§. 167 \text{ Geom}).$$

$$\text{FM} = x + \tfrac{1}{4}a$$

Lehrsatz.

Die gerade Linie FM, welche aus dem Brenn-Puncte F einer Parabel gegen das Ende ihrer Ordinate M ge-

zogen wird, ist gleich der Summe aus der Abscisse und der Distantz des Brenn-Punctes von der Scheitel.

Der 1. Zusatz.

Tab. II. Fig. 15. 221. Wenn ihr den vierdten Theil des Parameters aus A in F und in f traget/ durch AX so viel Parallel-Linien MM ziehet/ als euch gefället und aus F mit der Weite Pf die Puncte M beyderseits abschneidet; so könnet ihr abermals eine Parabel beschreiben.

Der 2. Zusatz.

Tab. II. Fig. 18. 222. Ihr könnet auch dieses durch die Bewegung verrichten. Den nehmet wie vorhin auf der Axe Af = AF = $\frac{1}{4}a$. Befestiget in A ein Lineal DB dergestalt/ daß es in f mit fx einen rechten Winckel macht. Nehmet einen Stab EC und befestiget an seinem einen Ende E einen Faden/ der ihm gleich ist: das andere Ende aber des Fadens bindet an einen Nagel/ den ihr im Brenn-Puncte F eingeschlagen. Wenn ihr einen Stift an den Stab EC haltet und ihn an dem Lineale DB verschiebet; so wird sich die Parabel beschreiben. Denn es ist beständig FM = AP + Af = $x + \frac{1}{4}a$ und daher M ein Punct in der Parabel (§. 220).

Anmerckung.

223. Auf ebenmäßige Art könnet ihr die Eigenschaften der Parabeln von höhere n Geschlechten unter-

terſuchen. Wollet ihr aber diejenigen haben/ wel- che allen Parabeln gemein ſind/ ſo dörfet ihr nur die allgemeine Æquation für ihre gantze Familie annehmen. Denn weil $a^{m-1}x = y^m$, ſo iſt auch $a^{m-1}v = z^m$/ folgends $(PM)^m : (Pm)^m = AP : Ap$. Wiederumb weil $PM + pm = \sqrt[m]{a^{m-1}x} + \sqrt[m]{a^{m-1}v}$, $mR = \sqrt[m]{a^{2m-2}v} - \sqrt[m]{a^{m-1}x}$; ſo iſt $(PM + pm)\,mR = \sqrt[m]{a^{2m-2}v} - \sqrt[m]{a^{2m-2}x^2}$. Weil $FR = \frac{1}{2}a$/ ſo iſt $a^m : 2^m = a^{m-1}x$/ folgends $x = a : 2^m = AF$. Tab. II. Fig. 17.

Die 21. Erklährung.

224. Die ELLIPSIS iſt eine krumme Linie/ in welcher ſich verhält das Qvadrat ihrer halben Ordinate PM zu dem Rectangulo aus den Theilen der Axe AP und PB/ wie die Axe AB zu einer unveränderlichen Linie/ die ihr Parameter genennet wird; das iſt/ wenn ihr $AB = a$/ den Parameter $= b$/ $PM = y$ und $AP = x$ ſetzet/ in welcher $ay^2 = abx - bx^2$. Tab. II. Fig. 19.

Der 1. Zuſatz.

225. Derowegen iſt $y^2 = bx - bx^2 : a$/ das iſt/ das Qvadrat der halben Ordinate iſt gleich einem Rectangulo aus der Abſciſſe in den Parameter/ weniger ein Rectangulum aus eben dieſer Abſciſſe in die vierdte

Proportional-Linie zu der Axe / dem Parameter und der Absciſſe.

Der 2. Zuſatz.

226. Weil $ay^2 = abx - bx^2$ / ſo iſt

$$\overline{bx^2 :, bx - y^2} = a$$

Demnach könnet ihr in einer Ellipſi aus dem gegebenen Parameter der Absciſſe und halben Ordinate die Axe folgender geſtalt finden. 1. Suchet zu AB $= b$ / AC $=$ AE $= y$ die dritte Proportional-Linie EF $= y^2 : b$. 2.
Tab. II. Fig. 20. Traget aus A in L die Absciſſe x / ſo iſt DL $= x - y^2 : b = bx - y^2, : b$. 3. Machet DF $= x$ / und ſuchet zu DL und DF $=$ LM die dritte Proportional-Linie FG $= bx^2 :, bx - y^2$. Dieſe iſt die verlangete Axe.

Der 3. Zuſatz.

227. Wiederumb weil $ayy = abx - bxx$ / ſo iſt $b = ayy :, ax - x^2$ / und daher könnet ihr in einer gegebenen Ellipſi den Parameter wie vorhin die Axe finden.

Der 4. Zuſatz.

228. Weil $yy = (abx - bxx) : a$ / ſo iſt $y = \sqrt{(abx - bxx, : a)}$. Derowegen wenn euch die Axe und der Parameter gegeben werden / könnet ihr für jede Absciſſe ihre gehörige halbe Ordinate folgender geſtalt finden. Suchet zu der Axe AB ($=$
Tab. II. Fig. 21. a) dem Parameter AC ($= b$) und der Abſciſſe

ſciſſe ($= x$) die vierdte Proportional-Linie CE ($= bx:a$) und zwiſchen dieſer und EF ($= a-x$) die mittlere Proportional-Linie EG ($= \sqrt{(abx - bx^2, : a)}$). Dieſe iſt die verlangete halbe Ordinate.

Die 188. Aufgabe.

229. **Die Diſtantz des Brenn-Punctes von der Scheitel AF zufinden.**

Aufloͤſung.

Es ſey AB $= a$, der Parameter $= b$, AF $= x$, ſo iſt FR $= \frac{1}{2} b$ (§. 213), und Tab. II. Fig. 19.

$$\frac{1}{4} ab^2 = abx - bxx \text{ (§. 224).}$$

$$x^2 - ax = - \frac{1}{4} ab$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab$$

$$\frac{1}{2} a - x = \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab)}$$

$$\frac{1}{2} a - \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab)} = x.$$

Regel.

Traget aus A in C $\frac{1}{4}$ AB $= \frac{1}{4} a$ und aus B in D den Parameter b, ſo iſt DA $= a - b$, und die mittlere Proportional-Linie zwiſchen DA und AC $= \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - ab\frac{1}{4})}$. Traget aus C in F die Linie EA, ſo iſt F der Brenn-Punct, denn AF $= \frac{1}{2} a - \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab)}$. Tab. II. Fig. 22.

Zusatz.

230. Also ist die Distantz des Brenn-Punctes von dem Mittelpuncte C $= V(\frac{1}{4} aa - \frac{1}{4} ab)$ / das ist die mittlere Proportional-Linie zwischen $\frac{1}{2} a$ und $a-b$.

Die 22. Erklährung.

Tab. II. Fig. 19. 231. **Die Perpendicular-Linie DC / welche die grössere Axe AB in zwey gleiche Theile theilet / ist die halbe kleine Axe.**

Die 89. Aufgabe.

232. **Aus dem gegebenen Parameter und der grossen Axe AB die kleine Axe CD zufinden.**

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$ / AB $= a$ / CD $= \frac{1}{4} z$ so ist

$$\frac{1}{4} z^2 : \frac{1}{4} a^2 = a : b \quad (\S.224)$$

$$z^2 = ab$$

$$z = V ab$$

Lehrsatz.

Die kleine Axe in der Ellipsi ist die mittlere Proportional-Linie zwischen der grossen und dem Parameter.

Der 1. Zusatz.

233. Derowegen ist der Parameter die dritte Proportional-Linie zu der grossen und kleinen Axe.

Der

Der 2. Zusatz.

234. Wenn die Distantz des Brenn-Punctes von der Scheitel AF = x ist/ so ist $ax - xx = \frac{1}{4}ab$ (§. 229). Derowegen ist das Rectangulum aus der Distantz des Brenn-Punctes von der Scheitel AF in ihr Complement zur grossen Axe FB dem vierdten Theile des Rectanguli aus der grossen Axe in den Parameter gleich. Tab. II. Fig. 19.

Die 90. Aufgabe.

235. **Die Verhältnis zufinden/ welche die halben Ordinaten PM und pm in der Ellipsi gegen einander haben.** Tab. II. Fig. 19.

Auflösung.

Es sey AB = a/ der Parameter = b/ AP = x/ PM = y/ Ap = z/ pm = v/ so ist

$$\left.\begin{array}{l} yy = bx - bx^2 : a \\ v^2 = bz - bz^2 : a \end{array}\right\} (\S.\ 224)$$

Derowegen ist $y^2 : v^2 = bx - bx^2 : abz - bz^2 = ax - x^2 : az - z^2 = (a-x)\,x : (a-z) : z$/ das ist/ $(PM)^2 : (pm)^2 = PB.AP : pB : Ap$.

Lehrsatz.

In der Ellipsi verhalten sich die Qvadrate der halben Ordinaten wie die Rectangula aus den Theilen der Axe.

Der 1. Zusatz.

236. Derowegen ist auch $(DC)^2 : (PM)^2$ =

$= (CB)^2 : AP.PB$/ folgends $(DC)^2 : (CB)^2 = (PM)^2 : AP.PB$ (§.130)/ das ist/ das Qvadrat der halben kleinen Axe verhält sich zum Qvadrate der halben grossen/ wie das Qvadrat der halben Ordinate zu dem Rectangulo aus den Theilen der grossen Axe.

Der 2. Zusatz.

237. Setzet demnach $CP = x$/ so ist $AP = \frac{1}{2}a - x$ / $PB = \frac{1}{2}a + x$ / folgends $\frac{1}{4}ab : \frac{1}{4}a^2 = y^2 : a^2 - x^2$. Derowegen ist

$$\frac{1}{4}a^2y^2 = \frac{1}{4}a^3b - abx^2$$

$$y^2 = ab - bx^2 : a$$

Also habet ihr noch eine andere Æquation, welche die Natur der Ellipsis erklähret.

Tab. II. Fig 19.

Die 91. Aufgabe.

238. **Die Größe der Linie zu determiniren / welche aus dem Brenn-Puncte f an das Ende D der kleinen Axe gezogen wird.**

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$/ $AB = a$/ so ist $(fC)^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ab$ (§.230) und $(DC)^2 = \frac{1}{4}ab$ (§.231). folgends $(fD)^2 = \frac{1}{4}a^2$ (§. Geom.). Dannenhero $FD = \frac{1}{2}a = DB$.

Zusatz.

239. Wenn euch die kleine und große Axe gegeben werden/ könnet ihr die Brenn-Puncte F und f gar leicht finden. Denn theilet

die

die grosse Axe AB in zwey gleiche Theile in C, und richtet aus C die halbe kleine Axe CD perpendicular auf / so könnet ihr aus D mit der halben grossen Axe AB die Brenn-Puncte determiniren.

Die 92. Aufgabe.

240. Die Grösse der geraden Linien FM und fm zu finden / welche aus beyden Brenn-Puncten F und f an das Ende M einer Semiordinate PM gezogen werden. Tab. II. Fig. 19.

Auflösung.

Es sey alles wie vorhin / nur FC = fC = c so ist PC = $\frac{1}{2}a - x$ / Pf = $c + \frac{1}{2}a - x$ / PF = $c - \frac{1}{2}a + x$ / $(PF)^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$ / $(Pf)^2 = cc + ac - 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$. Nun ist (§. 236).

$$(BC)^2 : (DC)^2 = AP.PB : (PM)^2$$

das ist / $\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - x^2 : (PM)^2$

Solchergestalt ist

$$(PM)^2 = ax - xx - 4ccx : a + 4ccxx : aa$$
$$(PF)^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$$

$$(FM)^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}a^2 - 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$

$$FM = \frac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

Wiederumb

$$(PM)^2 = ax - xx - 4ccx : a + 4ccxx : aa$$
$$(Pf)^2 = cc + ac - 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$$

---

fM

$(fM)^2 = c^2 + ac - 2cx + \frac{1}{4}a^2 - 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$

$fM = \frac{1}{2}a + c - 2cx : a$
$FM = \frac{1}{2}a + c + 2cx : a$

$fM + FM = a = AB$

Lehrsatz.

In der Ellipsi sind die beyden Linien fM und FM / welche aus den Brenn-Puncten F und f an einen Punct M in der Peripherie gezogen werden / zusammen genommen der grossen Axe AB gleich.

Zusatz.

Tab. II. Fig. 20. 241. Daher könnet ihr gar leicht aus der gegebenen grossen und kleinen Axe die Ellipsin beschreiben. Denn suchet die Brenn-Puncte F und f / und schlaget in ihnen zwey Nägel ein. Bindet an die Nägel einen Faden FMf / der so lang ist als die grosse Axe AB. Dehnet den Faden mit einem Stifte aus / und führet den Stift an dem Faden herumb / so wird die Ellipsis beschrieben.

Die 1. Anmerckung.

242. Ausser der Ellipsi des Apollonii / welche von dem ersten Geschlechte ist / könnet ihr noch unzehlich viel andere von höheren Geschlechtern erdencken / welche alle unter der allgemeinen Æquation begriffen werden: $ay^{m+n} = bx^m (a-x)^n$. Es ist nemlich in allen wie der Parameter zu der grossen Axe / also die Dignität der halben Ordinate / deren Exponente den Exponenten der Dignitäten von den Theilen der

Axe

Axe zusammen gleich ist/ zu dem Producte aus diesen Dignitäten. Z. E. In der Ellipsi von dem dritten Geschlechte ist $b:a = y^3 : x^2(a-x)^1$; in der Ellipsi von dem vierdten Geschlechte $b:a = y^4 : x^2(a-x)^2$.

Die 2. Anmerckung.

243. Wen die grosse Axe der kleinen gleich wird/ so wird aus der Ellipsi ein Circul. Denn alsdenn ist $\frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}a^2$ (§.232) und daher $b = a$/ folgends an stat $ay^2 = abx - bx^2 : a$ bekommet ihr $ay^2 = a^2 x - ax^2 : a$ das ist/ $y^2 = ax - xx$/ welche Gleichung den Circul erklähret. Wie man nun aber Ellipses von höheren Geschlechtern hat/ allso giebet es auch Circul von höhern Geschlechtern/ wenn ihr nemlich setzet $(AP)^m : (PM)^m = PM : PB$/ das ist/ $x^m : y^m = y : a-x$. Allso ist die Gleichung für unendliche Circul $ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}$ Z. E. Wenn $m = 1$/ so ist $ax - x^2 = y^2$ für den Circul des ersten Geschlechtes; ist $m = 4$/ so ist $ax^4 - x^5 = y^5$ die Gleichung für den Circul von dem vierdten Geschlechte.

Die 23. Erklährung.

244 **Die Hyperbel ist eine krumme Linie in welcher $ay^2 = abx + bxx$/ das ist/ wie eine unveränderliche Linie a/ welche die Zwerch-Axe (Axis transversus) genennet wird/ zu einer anderen unveränderlichen Linie/ die ihr Parameter heisset/ so das Qvadrat der Semiordinate zu dem Rectangulo aus der Summe der Abscisse und Zwerch-Axe in die Abscisse.**

Zusatz.

245. Derowegen ist $y^2 = bx + b^2 : a / b = a$ $y^2 : (ax + xx) / a = abx + bxx, : y^2$ u. s. w. wie in der Ellipsi, nur daß ihr das Zeichen + an stat des Zeichens -- habet.

Die 24. Erklährung.

246. Weil die Æquation der Hyperbel mit der Æquation für die Ellipsin übereinkommet/ so nennet man auch hier die mittlere Proportional-Linie zwischen der Zwerch-Axe und dem Parameter die kleine Axe.

Die 25. Erklährung.

Tab. II. Fig. 23. 247. Wenn ihr die Axe der Hyperbel AX über ihre Scheitel A verlängert/ und AB der Zwerch-Axe gleich machet/ so heisset der Punct C/ durch welchen AB in zwey gleiche Theile getheilet wird/ der Mittelpunct.

Die 93. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 23. 248. Aus dem gegebenen Parameter und der Zwerch-Axe AB die Distantz des Brenn-Punctes F von der Scheitel A zu finden.

Es sey der Parameter $= b$/ AB $= a$ so ist FM $= \frac{1}{2}b$ (§. 213) und (§. 244)

$$b : a = \tfrac{1}{4}bb : ax + xx$$

$$\tfrac{1}{4}abb = abx + bxx \quad b$$

$\frac{1}{4}ab$

$$\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}aa + ax + xx$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)} = \frac{1}{2}a + x$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)} - \frac{1}{2}a = x$$

Ihr könnet also x wie im 229 §. finden.

Der 1. Zusatz.

249. Also ist die Distantz des Brenn-Punctes von dem Mittelpancte $FC = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)}$.

Der 2. Zusatz.

250. Weil $ax + xx = \frac{1}{4}ab$, und $ax + xx = AF.FB$, hingegen $\frac{1}{4}ab = (CE)^2$ (§. 246); so ist $AF.FB = (CE)^2$.

Die 94. Aufgabe.

251. Die Verhältnis zu finden, welche die Semiordinaten PM und pm gegen einander haben. Tab. II. Fig. 23.

Auflösung.

Es sey die Zwerch-Axe $AB = a$ der Parameter $= b$, $AP = x$, $PM = y$ $Ap = v$, $pm = z$, so ist $y^2 : z^2 = (bx + bxx : a) : (bv + bv^2 : a) = ax + xx : av + vv = a + x, x : a + v, v$ das ist, $(PM)^2 : (pm)^2 = PB.AP : pB.Ap$.

Lehrsatz.

Die Qvadrate der Semiordinaten verhalten sich wie die Rectangula aus den Abscißen und der Zwerch-Axe.

Die 94. Aufgabe.

252. Die Verhältnis zu finden, welche

das Qvadrat der Zwerch-Axe zu dem Qvadrate der kleinen Axe hat.

Auflösung.

Das Qvadrat der Zwerch-Axe ist aa/ der kleinen Axe aber ab (§. 246). Allso verhält sich jenes zu diesem wie aa zu ab/ das ist/ wie a zu b (§. 130).

Zusatz.

253. Weil $b:a = (PM)^2 : AP.PB$/ (§. 244) so ist auch das Qvadrat der kleinen Axe zu dem Qvadrate der Zwerch-Axe wie das Qvadrat der Semiordinate zu dem Rectangulo aus der Abscisse in die Summe aus der Abscisse und der Zwerch-Axe.

Die 95. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 23. 254. Es seyn zwey Hyperbeln von gleicher Grösse/ die allso einen Parameter/ eine Zwerch-Axe und kleine Axe haben/ einander entgegen gesetzet in der Weite ihrer Zwerch-Axe AB. Ziehet aus beyder Brennpuncte f und F gegen einen Punct einer Hyperbel M zwey gerade Linien fm und FM. Ihr sollet ihre Grösse finden.

Auflösung.

Es sey alles wie vorhin/ nur $FC = fC = c$/ so ist $AF = c - \frac{1}{2}a$/ $Af = c + \frac{1}{2}a$/ $PF = x - c + \frac{1}{2}a$/ $Pf = c + \frac{1}{2}a + x$/ $(PF)^2 = xx - 2cx + cc + ax - ac + \frac{1}{4}aa$/ $(Pf)^2 = cc + ac + \frac{1}{4}aa + 2cx + ax + xx$. Nun ist §. 250 $(CE)^2 = cc - \frac{1}{4}aa$

$(AC)^2 : (CE)^2 = AP.PB : (PM)^2$

Das

das ist, $\frac{1}{4}aa : cc - \frac{1}{4}aa = ax + xx : (PM)^2$

Demnach ist

$$(PM)^2 = -ax - xx + 4c^2x : a + 4ccxx : a^2$$
$$(PF)^2 = xx - 2cx + cc + ax - ac + \frac{1}{4}aa$$

$$(FM)^2 = cc - 2cx - ac + \frac{1}{4}aa + 4c^2x : a + 4c^2 x^2 : a^2$$

$$FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a.$$

Wiederumb

$$(PM)^2 = -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$(Pf)^2 = cc + ac + \frac{1}{4}aa + 2cx + x + ax + xx$$

$$(fM)^2 = cc + ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx + 4c^2x : a + 4c^2 x^2 : a^2$$
$$fM = cx + \frac{1}{2}a + 2cx : a$$
$$FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$$

$$fM - FM = a = AB.$$

Zusatz.

Tab. II. Fig. 23.

255. Hieraus fließet eine Methode die Hyperbel zu beschreiben. Nemlich auf eine gerade Linie ZX traget die Zwerch-Axe AB und aus A in F, ingleichen aus B in f die Distantz des Brennpunctes von der Scheitel (§. 248). Schlaget in F und f Nägel ein. Bindet an den Nagel F einen Faden FMG und mit seinem anderen Ende an das Ende eines Linials fC, welches umb die Zwerch-Axe AB länger als der Faden ist. Hänget das Lineal mit dem anderen Ende an den Nagel in f. Drücket den Faden mit einem

Stifte an das Lineal und schiebet es fort/ so wird er die Hyperbel beschreiben.

Anmerckung.

256. Wie die Parabel/ Hyperbel und Ellipsis auf vielerley Weise beschrieben werden kan / lehret *Franciscus à Schooten* in Tractatu de Organica Conicarum Sectionum in plano descriptione, Lugd. *Bat.* 1646. in 4.

Die 26. Erklährung.

Tab. II. Fig. 25. 257. Wenn ihr die kleine Axe DE an die Scheitel der Hyperbel A rechtwincklicht setzet und aus dem Mittelpuncte C durch ihre beyden Ende D und E die geraden Linien CG und CF ziehet; so werden dieselben die Asymptoten genennet.

Die 96. Aufgabe.

258. Wenn die Ordinate Mm beyderseits biß an die Asymptoten in R und r verlängert wird / die Verhältnis der Theile RM und rm zu finden.

Auflösung.

Weil so wol Ad (§. 257) als PR (§. 185) mit CP einen rechten Winckel macht; so ist DE mit PR parallel (§. 92 Geom.) folgends (§. 177 Geom.) CA : AD = CP : PR und CA : AE = cP : Pr/ das ist/ weil DA = AE (§. 257) / CP : PR = cP : Pr / das ist/ CP : cP = PR : Pr (§. 130). Da nun

$cP = CP$ / so ist $PR = Pr$
folgends weil $PM = pm$

$RM = rm.$

Lehrsatz.

Wenn die Ordinaten der Hyperbel biß an ihre Asymptoten verlängert werden/ so sind die Theile zu beyden Seiten zwischen den Asymptoten und der Hyperbel einander gleich.

Die 97. Aufgabe.

259. **Den Unterscheid zwischen den Qvadraten PM und PR zufinden.** Tab. II. Fig. 25.

Auflösung.

Weil $CA : DA = CP : PR$ (§. 177 Geometr.) und $DA = \sqrt{\tfrac{1}{4}ab}$ (§. 146)/ $CP = \tfrac{1}{2}a + x$/ so findet ihr $PR = (\tfrac{1}{2}a\sqrt{\tfrac{1}{4}ab} + x\sqrt{\tfrac{1}{4}ab}) : \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{1}{4}ab} + 2x\sqrt{\tfrac{1}{4}ab} : a$. Derowegen ist

$$(PR) = \tfrac{1}{4}ab + bx + bxx : a$$
$$(PM)^2 = bx + bxx : a \quad (§.244).$$

$$(PR)^2 - (PM)^2 = \tfrac{1}{4}ab = (DA)^2.$$

Zusatz.

260. Wenn ihr setzet/ daß die Hyperbel mit ihrer Asymptote zusammen stosse/ so fället der Punct R auf M und ist $(PR)^2 = (PM)^2$ / folgends $(PR)^2 - (PM)^2 = 0$.

Allein $(PR)^2 - (PM)^2 = (DA)^2$. Darumb ist $(DA)^2 = 0$. Da nun dieses ungereimt ist / schliesset man daraus daß die Asymptote mit der Hyperbel niemals zusammen kommen kan.

Die 98. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 25. 261. **Die Grösse des Rectanguli aus MR in Mr zufinden.**

Auflösung.

Es sey $PR = c$ / $MR = y$ / so ist $MR = c - y$ / $mR = y + c$ / folgends $MR.\ mR = c^2 - y^2 = (PR)^2 - (PM)^2$.

Lehrsatz.

Das Rectangulum aus MR in mR ist gleich der Differentz der Qvadrate von PR und PM.

Der 1. Zusatz.

262. Weil $(PR)^2 - (PM)^2 = (DA)^2$ (§. 259) / so ist $mR.\ MR = (DA)^2$.

Der 2. Zusatz.

263. Derowegen da die Ordinate MM immer zu nimmet / muß MR immer kleiner werden: folgends die Asymptote der Hyperbel immer näher kommen.

Die 99. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 25. 264. **Wenn QM und sm mit der einen Asymptote Cr / hingegen qm und SM mit**

mit der anderen OQ parallel gezogen wird/ die Verhältnis der Rectangulorum aus QM in MS und qm in ms zufinden.

Auflösung.

Es sey RM = mr = a/ Rm = rM = b/ MQ = v mq = z. Nun ist (§.177 Geom.)

RM : MQ = Rm : mſ

$a : v = b : (bv : a)$

rm : mq = rM : MS

$a : z = b : (bz : a)$

Derowegen ist MQ. MS = $bvz : a$ und mq. mſ = $bvz : a$/ folgends MQ. MS = mq. mſ.

Lehrsatz.

Die Rectangula aus MQ in MS und mq in mſ sind einander gleich.

Der 1. Zusatz.

265. Es seyn AB und BC die Asympto- Tab. II.
ten einer Hyperbel. Setzet BD = DE = Fig. 26.
a/ PM = y/ BP = x/ so ist $xy = aa$ die Æquation, welche die Natur der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten erklähret.

Der 2. Zusatz.

266. Also ist die Æquation für unendliche Hyperpeln $a^{m+n} = x^m y^m$.

Die 1. Anmerckung.

267. Eben so könnet ihr eine Æquation für unendliche Hyperbeln in Ansehung der Axe finden

$ay^{m+n} = bx^m (a+x)^n$, deren Beschreibung Intieri in aditu ad nova arcana Geometrica detegenda lehret pag. 36. & seq. Es ist aber zu mercken, daß nach seiner Methode die Hyperbeln von einem höheren Geschlechte niemals beschrieben werden können, man habe denn zuvor alle niedrigeren beschrieben.

Der 3. Zusatz.

268. Wenn ihr wie vorhin BD = DE = a, BF = b, FP = x, PM = y setzet, so ist AP = $b+x$, folgends $a^2 = by + xy$, welche Æquation gleichfals die Natur der Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten erklähret.

Die 2. Anmerckung.

268. Ich habe bißher die vornehmsten Eigenschaften der berühmtesten Algebraischen Linien erklähret, und werdet ihr noch viel andere durch die Differential- und Integral-Rechnung finden. Damit ich aber auch etwas von den Mechanischen beybringe, so wil ich gleichfals nur von den berühmtesten Meldung thun. Es sind aber selbige die Spiral-Linie des *Archimedis*, die Conchoides des *Nicomedis*, die Cissoides des *Dioclis*, die Cyclois, die Logarithmica, die Quadratrix, welche alle die neueren Geometræ unendlich vermehret und noch viel andere dazu gefunden haben.

Die 27. Erklährung.

Tab. III. Fig. 27. 269. Wenn eine gerade Linie AC sich umb einen festen Punct A beweget, und in der Zeit ein Punct von C und A dergestalt fortläuft, wie wol mit gleicher Geschwindigkeit, daß er in A kommet, wenn

wenn die Linie CA den gantzen Circul beschrieben; so beschreibet der Punct die Spiral-Linie C. 1. 2. 3. 4. 5. A.

Der 1. Zusatz.

270. Es ist also beständig / wie der Bogen AI zu der gantzen Peripherie; so die Linie CI / zu CA.

Der 2. Zusatz.

271. Es sey demnach AC = *a* / die Peripherie = *b* / der Bogen AI = *x* / I 1 = *y* / so ist C 1 = *a* - *y* / folgends *x* : *b* = *a* - *y* : *a* (§. 270) und daher (wenn ihr *x* für die Abscisse / I 1 für die Semiordinate annehmet) $ax = ab - by$ die Æquation, welche die Natur der Spiral-Linie erklähret.

Der 3. Zusatz.

272. Wenn ihr aber C 1 = *y* setzet und das übrige wie vorhin behaltet / so erklähret $ax = by$ (§. 270) die Natur der Spiral-Linie.

Der 4. Zusatz.

273. Daher erklähret $a^n x^m = b^n y^m$ die Natur unendlicher Spiral-Linien.

Die 1. Anmerckung.

274. Ihr dörfet nicht meinen / als wenn die Spiral-Linien Algebraische Linien wären. Denn die Gleichungen / welche sie erklähren / sind nicht völlig Algebraisch / massen in den Algebraischen Gleichungen die Abscisse *x* und Semiordinate *y* zwey gerade Linie seyn sollen / in diesen aber ist *x* ein Circul-Bogen.

Die 2. Anmerckung.

275. Gleich wie ihr in der Archimedischen Spiral-Linie die Circul-Bogen zu den Abscissen annehmet; so könnet ihr auch auf gleiche Weise alle Bogen von allen andern Algebraischen Linien zu Abscissen annehmen und unendliche andere Arten der Spiral-Linien erdencken: dergleichen Arbeit hat Varignon rühmlich verrichtet in den Memoires de l'Academie Royale des Sciences A. 1704 p. m. 91. 181.

Die 28. Erklährung.

Tab. III. Fig. 28. 276. **Es sey eine gerade Linie AB/ welche mitten in E von einer anderen DE rechtwincklicht durchschnitten wird. Ziehet aus D durch AB so viel gerade Linien als ihr wollet/ und machet überall ec = EC. Die Linie/ welche durch alle Puncte c gehet/ ist die CONCHOIDES.**

Der 1. Zusatz.

277. Weil eC mit AB immer einen schieferen Winckel macht/ je weiter sie von EC wegkommet; so muß die Conchoides der geraden Linie AB immer näher kommen.

Der 2. Zusatz.

278. Doch weil CE niemals zu einem Puncte werden kan/ sondern vielmehr immer einerley Länge behält/ so können auch die Puncte C und e niemals zusammen stossen / folgends kan die Conchoides niemals mit der Linie AB zusammen kommen. Und allso ist AB ihre Asymptote.

An-

Anmerckung.

279. Wenn ihr anstat DE krumme Linien setzet/ so werdet ihr noch andere Arten bekommen. Ja ihr könnet auch setzen daß/ an stat CE = ec/ AE. EC = De, ec. Solcher gestalt habet ihr/ wenn Ed = a/ Ec = b/ De = x/ ec = y ist/ ab = xy. Und so wäre für unendliche dergleichen Linien $a^m b^m = x^m y^m$.

Die 29. Erklährung.

280. Ziehet die zwey Diameters eines Circuls AD und CD. die einander recht-wincklicht durchschneiden. Nehmet in beyden Qvadranten BD und CB glei-che Bogen Be und Cf. Ziehet aus den Puncten e und f perpendicular-Linien/ ei und fi auf den Diameter CD. Leget an D und die Puncte f nach einander ein Lineal und mercket die Puncte h/ da-rinnen die Linien le durchschnitten wer-den. Die Linie/ welche durch die Pun-cte h gehet/ heisset CISSOIDES. Tab. III. Fig. 29.

Zusatz.

281. Weil DI: IF = DG: GH (§. 177 Geom.) und DI = GC / IF = GE (§. 114. Geom. §. 2. Trigon.); so ist auch GC: GE = DG: GH.

Die 30. Erklährung.

282. Theilet einen Qvadranten ei-nes Circuls ABC in so viel gleiche Theile Tab. III. Fig. 30.

 als

als euch beliebet. In eben so viel Theile theilet den halben Diameter AB in I. II. III. u. s. w. Richtet aus diesen Puncten Perpendicular-Linien auf/ und ziehet aus dem Mittelpuncte C in die Theilungs-Puncte des Bogens die Linien B1/ B2/ B3 u. s. w. welche die perpendicular-Linien in a. b. c. d. e. durchschneiden. Die krumme Linie/ welche durch die Puncte a. b. c &c. gehet/ wird QVADRATRIX genennet.

Zusatz.

283. Derowegen ist allzeit wie der gantze Bogen AC zu dem Bogen C4/ so AB zu BIV oder df. Es sey AC $= b$/ AB $= a$/ C4 $= x$/ BIV $= y$/ so ist $ax = by$.

Die 31. Erklährung.

Tab. III. Fig. 31. 284. Theilet eine Linie AB in lauter gleiche Theile/ und richtet aus den Theilungs-Puncten 1. 2. 3. 4 &c. Perpendicular-Linien auf 1I/ 2II/ 3III/ 4IV &c. die in einer Geometrischen Proportion zunehmen. Die krumme Linie/ welche durch die Puncte I. II. III. IV &c. gehet/ wird die Logarithmische genennet.

Anmerckung.

285. Es wird diese Linie die Logarithmische genennet/ weil die Semiordinaten 1I/ 2II/ 3III &c. sich wie die Zahlen/ die Abscissen A1/ A2/ A3 &c. aber wie ihre zugehörige Logarithmi verhalten. Es können aber noch andere Arten der Logarithmischen Linien er-

erdacht werden. Hugenius hat zu Ende seines Discurses sur la presanteur verschiedene Eigenschafften dieser Linie beschrieben/ welche *Guido Grandus* in einem besonderen Buche demonstriret/ welches er unter dem Titul Geometrica Demonstratio Theorematum Hugenianorum circa Logisticam seu Logarithmicam Lineam zu Florentz 1701 in 4. herausgegebē. Man hat auch noch eine andere **Logarithmische Spiral-Linie** erfunden/ da der Qvadrant AB in gleiche Theile getheilet wird / und aus dem Mittelpuncte C gegen die Theilungs-Puncte des Bogens die Radii, CI, CII, CIII &c. gezogen/ von ihnen aber in Geometrischer Proportion die Linien C1. C2. C3 &c. abgeschnitten werden/ durch deren Ende 1 2. 3 &c. die verlangte Linie gehet. Tab. III. Fig. 32.

Die 32. Erklährung.

286. **Wenn sich ein Circul X auf einer Linie AC fort beweget/ bis er sich gantz überworffē hat/ so beschreibet der Punct a die Linie ABC/ welche CYCLOIS oder die Rade-Linie genennet wird.** Tab. IV. Fig. 33.

Zusatz.

287. Es ist allso die Linie AC der Peripherie des Circuls und überhaupt eine jede Semiordinate PM dem Bogen M*a* gleich. Denn die gerade Linie AD ist dem Bogen Pd/ und daher der übrige Bogen Pb/ folgends auch der Bogen BM der Linie dD gleich. Nun ist oD = ML (§. 91 Geom.) = PN (§. 114 Geom. §. 2. Trig.). Derowegen da NM = dO/ so ist auch PN + MN = do + O D/ das ist PM = dD. Folgends ist die Se-

Semiordinate PM dem Bogen Pb/ oder ihrer Abscisse BM gleich.

Die 1. Anmerckung.

288. Ihr könnet sich auch einen Circul auf krummen Linien wie vorhin auf einer geraden bewegen lassen / so bekommet ihr noch unzehlich viel andere Arten der krummen Linien.

Die 2. Anmerckung.

289. Bisher habe ich die leichtesten Regeln der Algebra von den niedrigsten Æquationen erklähret/ und auf allerhand Aufgaben appliciret. Nun wil ich die übrigen vornehmen/ welche man in Auflösung der höhern Æquationen vonnöthen hat.

Von der Natur der Æquationen.

Die 33. Erklährung.

290. Die Wurtzel ist der Werth der unbekandten Grösse in einer Æquation. Und ist es eine wahre Wurtzel/ wenn sie das Zeichen + hat/ z. E. wenn $x = +3$; hingegen eine falsche Wurtzel/ wenn sie das Zeichen - hat. z. E. wenn $x = -3$.

Die 100. Aufgabe.

291. Die Natur der Æquationen und ihre vornehmste Eigenschaften zu untersuchen.

Auflösung.

1. Nehmet so viel Werthe von x an als euch beliebet / formiret daraus einfache Gleichungen/ und resolviret sie auf o.

2. Mul-

2. Multipliciret die einfachen Gleichungen in einander/ so werden die höhern heraus kommen/ deren Betrachtung euch ihre Eigenschaften offenbahren wird.

Es sey $x = 2$ $\quad x = a$

$x = -3$ $\quad x = -b$

$x = 4$ $\quad x = c$

so ist $x - 2 = 0$ $\quad x - a = 0$

$x + 3 = 0$ $\quad x + b = 0$

$x - 4 = 0$ $\quad x - c = 0$

$$\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \\ \hline \quad +3x - 6 \\ x^2 - 2x \\ \hline x^2 + x - 6 = 0 \\ \quad x - 4 = 0 \\ \hline \quad -4x^2 - 4x + 24 \\ x^3 + x^2 - 6x \\ \hline x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - a = 0 \\ x + b = 0 \\ \hline x^2 + bx - ab = 0 \\ \quad -ax \\ \quad\quad x - c = 0 \\ \hline x^3 + bx^2 - abx - abc = 0 \\ \quad -ax^2 - bcx \\ \quad -cx^2 + acx \end{array}$$

Wenn ihr diese Gleichungen (die ihr nach Belieben auf höhere Grade erhöhen könnet) betrachtet; so werdet ihr mit dem Harriot und Cartesio wahrnehmen/

1. Die bekandte Größe des andern Gliedes sey die Sum̃e aller Wurtzeln mit einem wiedrigen Zeichen/ des dritten Gliedes die Symme der Producte aus

aus zwey in zwey Wurtzeln: des vierdten die Summe der Producte aus drey in drey Wurtzeln/ &c. endlich das letzte Glied das Product aus allen Wurtzeln miteinander. Z. E. in der Qvadratischen Æquation ist die bekandte Grösse des andern Gliedes † 1/ die Wurtzeln sind † 2 - 3.

2. Eine jede Æquation habe so viel Wurtzeln als das erste Glied Abmessungen hat/ oder der Exponente der Dignität desselben Gliedes Einheiten in sich begreiffet. Z. E. In der Qvadratischen Æquation ist der Exponente 2/ die Zahl der Wurtzeln ist auch 2.

3. Und zwar seyn in jeder Æquation so viel wahre Wurtzeln als Abwechslungen der Zeichen sind; so viel falsche als einerley Zeichen auf einander folgen. Z. E. in unserer Qvadratischen Æquation, die eine wahre Wurtzel † 2 und eine falsche - 3 hat/ folgen aufeinander † † und wechseln ab † -. In der Cubischen/ welche zwey wahre Wurtzeln † 2 und † 4 und eine falsche - 3 hat; wechseln anfangs † -/ darauf folgen aufeinander - - und abermals wechseln ab - †.

Die 1. Anmerckung.

292. Der erste und andere Satz lässet sich gar leicht aus der Art/ wie die Gleichungen entstehen/ demonstriren/ so daß ich es für unnöthig achte/ den Beweiß

weiß hieher zu setzen. Allein den dritten / welchen *Harriot* zuerst durch vielen Versuch gefunden / hat zur Zeit noch keiner überhaupt erweisen können / daher ihn auch Reynault aus seiner Analyse demonstré gar weg gelassen / weil er prædentiret die Regeln der Algebra zu demonstriren.

Die 2. Anmerckung.

293. Ihr dörfet euch nicht wundern / daß eine einige Æquation so gar verschiedene Wurtzeln haben kan. Denn es ist zu wissen / daß eine einige Aufgabe öfters verschiedene Fälle haben kan / und wir in jedem Falle auf einerley Gleichung verfallen. Doch weil unterweilen einige Fälle unmöglich werden / so muß auch die Æquation unmögliche Wurtzeln haben. Wie viel aber in jedem Falle unmögliche Wurtzeln sind / hat zwar *Newton* in seiner Arithmetica Universali p. 242. zu zeigen einiger massen sich bemühet; doch weil weder die Regel allgemein ist / noch auch er die Demonstration hinzu setzet / so wollen wir uns damit nicht aufhalten / zumal da man sie auch in den Leipziger Actis A. 1708. p. 522. 523 findet.

Die 101. Aufgabe.

294. **Die Wurtzel einer gegebenen Gleichung umb eine gegebene Grösse zu vermehren oder zu vermindern / unerachtet man sie noch nicht erkandt hat.**

Auflösung.

Es sey die gegebene Æquation $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$. Ihr sollet die Wurtzel umb 3 vermehren. Setzet

$$x + 3 = y$$

So ist $x = y - 3$

$$x^2 = y^2 - 6y + 9$$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 9y^2 + 27y - 27 \\ -6x^2 &= -6y^2 + 36y - 54 \\ +13x &= +13y - 39 \\ -10 &= -10 \end{aligned}$$

$$y^3 - 15y^2 + 76y - 130 = 0$$

Eine neue Gleichung/ darinnen $y = x + 3$.

Wenn ihr in der Gleichung die Wurtzel umb 3 vermindern sollet/ so setzet

$$y - 3 = x$$

$$y = x + 3$$

$$y^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$\begin{aligned} y^3 &= x^3 + 9x^2 + 27x + 27 \\ -15y^2 &= +15x^2 - 90x - 135 \\ +76y &= +76x + 228 \\ -130 &= -130 \end{aligned}$$

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$$

Eine neue Gltichung/ darinnen $x = y - 2$.

Die 102. Aufgabe.

295. Die Wurtzel in einer Gleichung durch eine gegebene Grösse zu multipliciren.

Auflösung.

Ihr sollet in der Æquation $x^3 + px^2 + qx - r = 0$ die Wurtzel durch a multipliciren, Setzet

$$ax = y$$

so ist $x = y:a$

$$x^2 = y^2:a^2$$

$$x^3 = y^3:a^3$$

$$-px^2 = -py^2:a^2$$

$$+qx = +qy:a$$

$$-r = -r$$

$$\frac{y^3 - a^3py^2:a^2 + qy:a - r = 0}{a^3}$$

$y^3 - apy^2 + a^2qy - r = 0$/ Eine neue Gleichung/ in welcher $y = ax$.

Zusatz.

296. Hieraus erhellet/ daß ihr nur die vorgegebene Æquation durch eine Geometrische Progreßion multipliciren dörfet/ deren erstes Glied 1/ der Exponente aber diejenige Zahl ist/ durch welche die Wurtzel multipliciret werden sol. Z. E. Es sol in der Gleichung $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ die Wurtzel durch 2 multipliciret werden: so verfahret alſo.

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$$

1	2	4	8	16

$$y^4 + 8y^3 - 76y^2 - 848y - 1920 = 0$$

eine Gleichung/ darinnen $y = 2x$.

Wiederumb es sol in der Gleichung $x^4 + q$

$x^2 - rx - s = 0$ die Wurtzel durch c multipliciret werden. Verfahret allso

$$x^4 * + qx^2 - rx - s = 0$$
$$1 \quad c \quad c^2 \quad c^3 \quad c^4$$

$y^4 * + c^2 qx^2 - c^3 rx - c^4 s = 0$, eine neue Gleichung, darinnen $y = cx$.

Anmerckung.

297. Der Stern wird jederzeit in die Stelle der Glieder gesetzet, welche fehlen.

Die 103. Aufgabe.

298. **Die Wurtzel in einer gegebenen Æquation durch eine gegebene Grösse zu dividiren.**

Auflösung.

Es sey die gegebene Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Die Wurtzel sol durch a dividiret werden. Setzet

$$x : a = y$$

so ist $x = ay$

$$x^2 = a^2 y^2$$

$$x^3 = a^3 y^3$$
$$-px^2 = -a^2 py^2$$
$$+qx = +aqy$$
$$-r = -r$$

$$a^3 y^3 - a^2 py^2 + aqy - r = 0$$

$y^3 - py^2 : a + qy : a^2 - r : a^3 = 0$/
Eine neue Gleichung/ in welcher $y = x : a$.

Zusatz.

299. Hieraus erhellet/ daß ihr die vorgegebene Gleichung nur durch eine Geometrische Progreßion dividiren dörfet/ deren erstes Glied 1/ der Exponente aber diejenige Grösse ist/ wodurch die Division geschehen sol. Z. E. die Wurtzel von $x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$ sol durch 2 dividiret werden. Verfahret also:

$$x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$$
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$$

$y^4 + 4y^3 - 19y^2 - 106y - 120 = 0$/
Eine neue Gleichung/ darinnen $y = \frac{1}{2}x$.
Wiederumb es sol die Wurtzel von $x^3 - 36x - 54 = 0$ durch 3 dividiret werden. Verfahret also:

$$x^3 * - 36x - 54 = 0$$
$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27$$

$y^3 - 4y - 2 = 0$/ eine neue Gleichung/ darinnen $y = \frac{1}{3}x$.

Die 104. Aufgabe.

300. **Eine Æquation, darinnen einige Glieder fehlen / vollständig zumachen.**

Auflösung.

Vermehret die Wurtzel umb so viel als

ihr wollet oder vermindert sie (§. 294): so ist geschehen/ was man verlangete.

Z. E. Es sey $x^3 * - 23x - 70 = 0$. Setzet

$x + 1 = y$

so ist $x = y - 1$

$x^2 = y^2 - 2y + 1$

$x^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1$

$-23x = -23y + 23$

$-70 = \quad -70$

$y^3 - 3y^2 - 20y - 48 = 0$

Eine neue Gleichung/ darinnen kein Glied fehlet und $y = x + 1$

Die 105. Aufgabe.

301. **Aus einer gegebenen Æquation das andere Glied weg zu schaffen.**

Auflösung.

Wenn das andere Glied das Zeichen + hat/ so vermehret; hat es aber das Zeichen -/ so vermindert die Wurtzel (§. 294) durch den Qvotienten/ der heraus kommet/ so man die bekandte Grösse des andern Gliedes durch den Exponenten des ersten dividiret.

Z. E. Ihr sollet aus der Gleichung $x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0$ das andere Glied wegnehmen. Setzet $x - 8 : 3 = y$

so ist $x = y + 8 : 3$

$x^2 = y^2 + 16y : 3 + 64 : 9$

$$x^3 = y^3 + 8y^2 + 192y : 9 + 512 : 27$$
$$-8x^2 = -8y^2 - 128y : 3 - 512 : 9$$
$$-x = \quad -y \quad - 8 : 3$$
$$+8 = \quad +8$$

$$y^3 * \quad - 67y : 3 - 880 : 27 = 0$$

Eine neue Gleichung/ darinnen das andere Glied fehlet und $y = x - 8 : 3$.

Zusatz.

302. Wenn ihr also aus einer Qvadratischen Æquation das andere Glied wegnehmet; könnet ihr solche noch auf eine andere Art/ als vorhin geschehen/ auflösen. Z. E. Es sey $x^2 - 8x + 15 = 0$. Setzet $x - 4 = y$/ so ist $x = y + 4$

$$x^2 = y^2 + 8y + 16$$
$$-8x = -8y - 32$$
$$+15 = \quad +15$$

$$y^2 - 1 = 0$$

$$y = 1$$

folgends $x = 1 + 4 = 5$.

Die 106. Aufgabe.

303. Aus einer gegebenen Æquation die Brüche wegzuschaffen.

Auflösung.

Multipliciret die Wurtzel durch das Product aus den Nennern aller vorkommenden Brüche/ oder eine Zahl/ durch welche sich

die Nenner dividiren lassen. So ist geschehen/ was man verlangete.

Exempel.

$$y^3 * - 67 : 3y - 880 : 27 = 0$$
$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27$$

$$x^3 - 201\,x - 880 = 0/$$

Eine neue Gleichung/ in welcher $x = 3y$

$$x^3 - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{3}{4}x - 64 = 0$$
$$1 \quad 12 \quad 144 \quad 1728$$

$$y^3 - 8y^2 + 108y - 110592 = 0$$

Eine neue Gleichung/ in welcher $y = 12\,x$.

Die 107. Aufgabe.

304. Aus einer gegebenen Æquation die Irrational-Grössen abzuschaffen.

Auflösung.

Multipliciret die Wurtzel durch die Irrational-Grösse/ so weggenommen werden sol (§. 296).

Exempel.

$$x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 8abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2 = 0$$
$$1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad \sqrt{8} \quad 4$$

$y^4 + 4ay^3 + 16aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0$/ eine neue Gleichung darinnen $y = x\sqrt{2}$.

Die 1. Anmerckung.

305. Wenn höhere Irrational-Grössen vorkommen/ müsset ihr die Wurtzel der Æquation nicht durch die Grösse die ihr wegschaffen sollet/ sondern durch eine andere/ die umb einen Grad niedriger ist/ mul-

multipliciren: wie ihr aus beygefügtem Exempel ersehet.

$$\begin{array}{llll} & 3 & 3 & \\ x^3 - ax^2 \sqrt{\ }2 & \dagger\ abx\sqrt{\ }32 & - aab & = 0 \\ 1 & 4^{1:3} & 16^{1:3} & - 4 \end{array}$$

$y^3 - 2ay^2 \dagger 8aby - 4aab = 0$/
Eine neue Gleichung/ die gantz rational ist und deren Wurtzel $y = 4^{1:3} x$.

Die 2. Anmerckung.

306. Unterweilen können die Irrational-Grössen auch durch das dividiren weggeschaffet werden/ wie aus folgenden Exempel zu ersehen:

$$\begin{array}{llll} x^3 - 2^{1:3}\, ax^2 & \dagger (32)^{1:3}\, abx & - a^2b & = 0 \\ 1 \quad 2^{1:3} & 4^{1:3} & 2 & \end{array}$$

$y^3 - ay^2 \dagger 2aby - 2aab = 0$/
Eine neue Gleichung/ die gantz rational ist und deren Wurtzel $y = x\ 12^{1:3}$

Allein keine von beyden Methoden ist zulänglich alle vorkommende Gleichungen gantz-rational zumachen.

Die 3. Anmerckung.

307. Alles/ was bißher von den Æquationen gelehret worden/ ist zu dem Ende geschehen/ damit wir sie völlig auflösen/ das ist/ den Werth der unbekandten Grösse so wol Geometrisch/ als in Zahlen finden könten; welches nun in folgendem gezeiget werden sol.

Die 108. Aufgabe.

308. **Alle Rational-Wurtzeln/ die in einer gegebenen Æquation enthalten sind/ zufinden.**

Auflösung.

1. Es sey die gegebene Æquation $x^3 - 3x^2$ $10x + 24 = 0$. Weil 24 das Product aus allen Wurtzeln ist/ so resolviret es in die Zahlen/ durch deren Multiplication es entstehet (§. 56)/ welche sind 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24 und machet daraus folgende einfache Gleichungen $x - 1 = 0$/ $x + 1 = 0$/ $x - 2 = 0$/ $x + 3 = 0$/ $x - 4 = 0$/ $x + 4 = 0$ 2c.

2. Dividiret die gegebene Æquation durch diese einfachen/ denn durch die sie sich dividiren lässet/ die zeigen ihre Rational-Wurtzeln (§. 294). Als $x3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ läst sich dividiren durch $x + 3$/ derowegen ist -3 eine falsche Wurtzel von dieser Gleichung. Der Qvotient/ so heraus kommet/ $x^2 - 6x + 8 = 0$ läst sich ferner dividiren durch $x - 2$ und der neue Qvotient ist $x - 4$. Derowegen sind 2 und 4 zwey wahre Wurtzeln von der gegebenen Gleichung.

Anders.

Ihr dörfet auch nur die Zahlen/ in welche das letzte Glied zerfället worden/ nach einander in die Stelle vor x setzen: denn wenn durch diese Substitution die gantze Gleichung zernichtet wird/ so ist die vor x gesetzte Zahl eine von ihren Rational-Wurtzeln (§. 291). Z. E. Es sey $x^2 - 6x + 8 = 0$. Das letzte

letzte Glied 8 entstehet/ wenn ihr 2 durch 4 multipliciret. Setzet $4 = x$

$$\begin{aligned} \text{so ist} \quad 16 &= x^2 \\ -24 &= -6x \\ +8 &= +8 \\ \hline 0 &= 0 \end{aligned}$$

Solcher gestalt ist † 4 eine von den National-Wurtzeln.

Die 1. Erklährung.

309. Weil in der ersten Methode das viele dividiren beschwerlich fallen würde/ hat man diesen Vortheil ausgedacht. 1. Ziehet die Zahl/ welche ihr verversuchen wollet/ von der bekandten Zahl des andern Gliedes ab/ und was heraus kommet/ multipliciret durch eben selbe Zahl. 2. das Product ziehet von der bekandten Zahl in dem dritten Gliede ab/ und was überbleibet/ multipliciret abermal durch mehr gedachte Zahl. 3. das neue Product ziehet von dem vierdten Gliede ab u. s. w. Wenn endlich bey dem letzten Gliede nichts übrig bleibet/ so ist die versuchte Zahl eine von den National-Wurtzeln. Z. E. Ihr suchet die National-Wurtzeln von $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$. Das letzte Glied 10 lässet sich in 1. 3. 5. 15. zerfällen. Wenn ihr versuchen wollet/ ob einige darunter von den Wurtzeln seyn; geschiehet es folgender Gestalt.

$$\begin{array}{cccc} x^3 - 3x^2 & -13x & +15 & = 0 \\ -1 & +2 & +15 & \\ \hline -2 & +15 & 0 & \\ \hline +2 & +15 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
x^3 - 3x^2 & -13x & +15 & = 0 \\
+3 & -18 & 15 & \\
\hline
-6 & -5 & 0 & \\
+3 & +3 & & \\
\hline
-18 & 15 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
x^3 - 3x^2 & -13x & +15 & = 0 \\
-5 & -10 & +15 & \\
\hline
+2 & -3 & 0 & \\
-5 & -5 & & \\
\hline
-10 & +15 & &
\end{array}$$

Also ist $x-1=0$ / $x+3=0$ / $x-5=0$ / das ist 1 und 5 sind die beyden wahren Wurtzeln / 3 ist die falsche.

Die 2. Anmerckung.

310. Damit ihr aber sehet / daß dieser Vortheil aus der ersten Methode völlig genommen / und für keine besondere zu halten sey / wil ich das vorige Exempel nach der gemeinen Art rechnen.

$$\begin{array}{l}
x-1 \,\big)\, x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0 \,\big(\, x^2 - 2x - 15 \\
 x^3 - x^2 \\
\hline
 -2x^2 - 13x \\
 -2x^2 + 2x \\
\hline
 -15x + 15 \\
 -15x + 15 \\
\hline
 0 \quad 0
\end{array}$$

Die 109. Aufgabe.

311. Die Schrancken zu finden / zwi-

schen

schen welchen die Grösse der Wurtzeln enthalten ist.

Auflösung.

Es sey $x^3 - qx + r = 0$ / so ist $x^2 + r = qx$ und demnach qx grösser als r / folgends x grösser als $r:q$. Wiederumb qx ist grösser als x^3 / und daher q grösser als x^2 / folgends x kleiner als $\sqrt{q}$. Die Schrancken der Wurtzeln in gegenwärtigem Falle sind also $r:q$ und $\sqrt{q}$.

Es sey $x^3 + qx - r = 0$ / so ist $x^3 + qx = r$ / und demnach qx kleiner als r / folgends x kleiner als $r:q$. Wiederumb a ist grösser als x^3 und daher x grösser als $r^{1:3}$ / folgends $xr^{2:3}$ grösser als x^3 / und $xr^{2:3} + qx$ grösser als r / endlich x grösser als $r:(r^{2:3} + q)$. Also fället die Grösse der Wurtzel zwischen $r:q$ und $r:(r^{2:3} + q)$. Es sey $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, so ist $x^3 - px^2 = r - qx$. Wenn nun x grösser als p / so ist auch r grösser als qx und dannenher $r:q$ grösser als x. Hingegen wenn p grösser als x ist / so ist qx grösser als r / und dannenhero auch $q:r$ grösser als x. Derowegen fallen in beyden Fällen die Wurtzeln zwischen p und $r:q$.

Es sey $x^3 - px^2 - qx + r = 0$ / so ist $x^3 + r = px^2 + qx$ / folgends $px^2 + qx$ grösser als r / und daher auch $x^2 + qx:p + qq:4pp$ grösser als $r:p + qq:4pp$ / $x + q:2p$ grösser als $\sqrt{(r:p + qq:4pp)}$ / endlich x grösser als $\sqrt{(r:p +}$

$qq:4pp)-q:2p$. Wiederumb px^2+qx ist grösser als x^3/ dannenhero $px+q$ grösser als x^2/ und q grösser als x^2-px/ das ist $x^2-px+\frac{1}{4}pp$ kleiner als $q+\frac{1}{4}pp$/ $x-\frac{1}{2}p$ kleiner als $\sqrt{}(q+\frac{1}{4}pp)$/ endlich x kleiner als $\frac{1}{2}p+\sqrt{}(q+\frac{1}{4}pp.)$. Die Schrancken also der Wurtzeln sind $\sqrt{}(r:p+qq:4pp)-q:2p$ und $\sqrt{}(q+\frac{1}{4}pp)$.

Es sey $x^4-qx^2-rx-s=0$/ so ist $x^4-qx^2=rx+s$. Demnach ist x^2 grösser als q/ weil sich qx^2 von x^4 abziehen läst/ und x grösser als $\sqrt{}q$. Also ist ferner $x\sqrt{}q$ grösser als qx. Wiederumb weil $x^4-rx=qx^2+s$/ so ist x^3 grösser als r und x grösser als $r^{1:3}$/ auch $x^3r^{1:3}$ grösser als rx. Endlich da $x^4-s=qx^2+rx$/ so ist x^4 grösser als s/ und x grösser als $s^{1:4}$/ folgends $x^3s^{1:4}$ grösser als s. Weil nun $x^4=qx^2+rx+s$/ so ist x^4 kleiner als $x^3\sqrt{}qr^{1:3}+x^3s^{1:4}$/ und deswegen x kleiner $q^{1:2}+r^{1:3}+s^{1:4}$. Die Schrancken der Wurtzel in gegenwärtigem Falle sind also $\sqrt{}q$ oder $r^{1:3}$ und $q^{1:2}+r^{1:3}+s^{1:4}$.

Eben so wird in andern Fällen verfahren.

Anmerckung.

311. Damit ihr die vorgeschriebene Methode besser fassen möget/ wil ich ein Exempel in Zahlen anführen. Z. E. Es sey $x^3-3x+1=0$/ so ist $q=3$ und $r=1$/ folgends $r:q=1:3$ und $\sqrt{}q=\sqrt{}3$. Solcher massen sind die Schrancken dieser Gleichung $\frac{1}{3}$ und $\sqrt{}3$/ das ist/ die Wurtzel muß grösser als $\frac{1}{3}$ und kleiner als $\sqrt{}3$ seyn.

Zusatz.

312. Wenn ihr die Zahl wisset / welche grösser als eure Wurtzel ist / so werdet ihr nicht mit vergeblichen Zahlen (§. 308. 309.) versuchen / ob sie unter die Rational-Wurtzeln gehören oder nicht.

Die 110. Aufgabe.

313. Die Schrancken / zwischen welchen die Grösse der Wurtzeln enthalten ist / noch auf andere Art zu finden.

Auflösung.

1. Multipliciret ein jedes Glied durch den Exponenten der in ihm befindlichen unbekandten Grösse / und dividiret das Product durch die Wurtzel der Æquation.
2. Multipliciret abermal ein jedes Glied des Qvotienten durch den Exponenten der in ihm befindlichen unbekandten Grösse und dividiret das Product durch die Wurtzel der Æquation.
3. Fahret solchergestalt fort / biß nicht mehr als x^1 übrig bleibet / diejenige Zahl ist grösser als eine jede von den wahren Wurtzeln / welche eine Zahl mit + bringet / wenn ihr sie in die Stelle von x in allen Qvotienten schreibet.

Exempel.

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$$
$$5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$$

$5x^5$

$$5x^5 - 8x^4 - 30x^3 + 60x^2 + 63x = 0$$

$$\overline{}\, x$$

$$5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = 0$$

$$4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$$

$$20x^4 - 24x^3 - 60x^2 + 60x = 0$$

$$\overline{}\, x$$

$$20x^3 - 24x^2 - 60x + 60 = 0$$

$$3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$$

$$60x^3 - 48x^2 - 60x = 0$$

$$\overline{}\, x$$

$$60x^2 - 48x - 60 = 0$$

$$2 \quad 1 \quad 0$$

$$120x^2 - 48x = 0$$

$$\overline{}\, x$$

$$120x - 48 = 0$$

$$\overline{}\, 2$$

$$5x - 2 = 0$$

Versuchet ob 1 sich in die Stelle der Qvotienten von x setzen lasse/ solchergestalt daß eine Zahl mit + heraus kommet Ihr findet $5x - 2 = +3$/ aber $5xx - 4x - 5 = 5 - 4 - 5 = -4$. Demnach ist der Schrancken grösser als 1. Versuchet es mit 2/ so habet ihr

$5x - 2 = +8$

$5xx - 4x - 5 = +7$

$5x^3 - 6xx - 15x + 15 = +1$

$5x^4 - 8x^3 - 30xx + 60x + 63 = +79$

$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = +46.$

Da

Da nun alle Zahlen 8. 7. 1. 79. 46 das Zeichen † haben/ so ist 2 grösser als alle wahre Wurtzeln.

4. Eben so könnet ihr die Schrancken der falschen Wurtzeln finden/ wenn ihr mit Zahlen versuchet/ die das Zeichen - haben. Oder weil die falschen Wurtzeln in wahre verwandelt werden/ wenn man die Zeichen in den geraden Stellen verändert (§. 291); so verändert in besagten Stellen die Zeichen/ und behaltet in der Substitution Zahlen mit dem Zeichen †.

Z. E. Wenn ihr in dem vorigen Falle mit 1 und 2 versuchet/ findet ihr nicht überall Zahlen mit dem Zeichen †. Derowegen ist der Schrancke der falschen Wurtzeln grösser als -2. Versuchet es mit 3/ so kommet

$5x + 2 = +17$

$5xx + 4x - 5 = +40$

$5x^3 + 6x^2 - 15x + 15 = +159$

$5x^4 + 8x^3 - 30x^2 - 90x + 63 = +184$

$x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 30x^2 + 63x + 120 = +124$

Also ist -3 grösser als eine jede falsche Wurtzel.

Die 1. Anmerckung.

314. Damit die Arbeit nicht zu weitläufftig wird/ dörffet ihr nur die Substitution anfangs in dem Qvotienten versuchen/ in welchem die falschen Wurtzeln die Oberhand zu haben scheinen. Denn wenn in diesem Falle — heraus kommet/ so sehet ihr auf einmal/ daß die Zahl/ mit der ihr es versuchet/ verwerflich ist.

Die

Die 2. Anmerckung.

315. *Newton* in seiner Arithmetica universali (p. 250 & seqq.) hat noch eine andere Methode/ die aber weitläufftiger ist/ und daher in der Ausübung verdrießlicher fället.

Die III. Aufgabe.

316. **Aus einer Cubischen Æquation die Wurtzeln zu finden.**

Auflösung.

Wenn aus den Cubischen Æquationen das andere Glied weggenommen wird/ so bekommet ihr drey Fälle/ nemlich

$$x^3 = +px + q$$
$$x^3 = -px + q$$
$$x^3 = +px - q$$

Damit ihr nun die Wurtzeln findet/ so setzet

$$x = y + z$$

Dann ist $x^3 = y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3$

$$px = py + pz$$

$y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3 = py + pz + q$ im ersten (Falle.

Setzet $3y^2z + 3z^2y = py + pz$ ——— $y + z$

so ist $3yz = p$

$$z = p : 3y$$

Es ist $y^3 + z^3 = q$

ferner

das ist $y^3 + p^3 : 27y^3 = q$

$$y^6 + p^3:27 = qy^3$$

$$y^6 - qy^3 = p^3:27$$
$$\tfrac{1}{4}qq \quad \tfrac{1}{4}qq \quad (\S.79).$$

$$y^6 - qy^3 + \tfrac{1}{4}qq = qq + \tfrac{1}{27}p^3.$$

$$y^3 - \tfrac{1}{2}q = \sqrt{(\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3)}$$
$$y = (\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3)})^{1:3}$$

Nun ist

$$z^3 = q - y^3$$

Das ist $z^3 = \tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3)}$

$$z = (\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3)})^{1:3}$$

Demnach ist $y + z = (\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3)})^{1:3} + (\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3)})^{1:3}$ die verlangte Wurtzel in dem ersten Falle.

Setzet für $-p$ nun ferner $+p$, so kommet die Wurtzel in dem anderen Falle $(\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3)})^{1:3} + (\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3)})^{1:3}$.

Endlich für $+q$ nehmet $-q$, so erhaltet ihr die Wurtzel in dem dritten Falle $(-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3)})^{1:3} + (-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3)})^{1:3}$.

Die 1. Anmerckung.

317. Diese Regeln werden insgemein *Cardani* Regeln genennet, weil er sie zu erst erfunden.

Die 2. Anmerckung.

318. Damit aber ihr Gebrauch deutlich erhelle, so wil ich eines und das andere Exempel anführen. Es sey $x^3 = * 6x + 40$. Weil $p = 6$, $q = 40$, und daher $\tfrac{1}{2}q = 20$, $\tfrac{1}{4}qq = 400$, $\tfrac{1}{3}p =$

$= 2 / \frac{1}{27} p^3 = 8$; so ist vermöge der ersten Regel $x = (20 - V(400 - 8))^{1:3} + (20 + V(400 - 8))^{1:3} = (20 - V 392)^{1:3} + (20 + V 392)^{1:3} =$ (wenn die Cubic-Wurtzel beyderseits würcklich ausgezogen wird) $2 - V2 + 2 + V2 = 4$. Ist demnach 4 eine wahre Wurtzel.

Es sey $x^3 = * - 3x + 36$. Weil $p = -3$ / $q = 36$ / und daher $\frac{1}{2} q = 18$ / $\frac{1}{4} qq = 324$ / $\frac{1}{3} p = -1$ / $\frac{1}{27} p^3 = 1$; so ist vermöge der anderen Regel die Wurtzel $(18 - V(324 + 1))^{1:3} + (18 + V(324 + 1))^{1:3} =$ (wenn ihr die Cubic-Wurtzel beyderseits würcklich ausziehet) $1\frac{1}{2} - V\, 3\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2} + V\, 3\frac{1}{4} =$

Es sey $x^3 = * 6x - 40$. Weil $p = 6$ / $q = 40$ / und daher $\frac{1}{2} q = 20$ / $\frac{1}{4} qq = 400$ / $\frac{1}{3} p = 2$ / $\frac{1}{27} p^3 = 8$; so ist vermöge der dritten Regel $(-20 - V(400 - 8))^{1:3} + (-20 - V(400 - 8))^{1:3} = (-20 - V 392))^{1:3} + (-20 - V(392))^{1:3} =$ (wenn die Cubic-Wurtzel beyderseits würcklich ausgezogen wird) $-2 - V2 + V2 - 2 = -4$. Demnach ist 4 eine falsche Wurtzel der vorgegebenen Æquation.

Aus diesen Exempeln erhellet zu gleich / daß $\frac{1}{4} qq$ allzeit grösser seyn muß im ersten und dritten Falle als $\frac{1}{27} p^3$.

Die 3. Anmerckung.

319. Man hat zwar auf eine gleiche Art eine Regel für die Wurtzeln aus einer Æquation von dem vierdten Grade aus zuziehen gefunden; allein weil sie nicht sonderlich gebraucht werden / so wil ich die Anfänger damit nicht aufhalten / sondern gehe vielmehr fort und zeige wie man durch Näherung die Wurtzel finden kan / wenn eine Æquation keine Rational-Wurtzel hat.

Die 112. Aufgabe.

320. Aus einer Æquation durch Näherung die Wurtzel zu suchen.

Auflösung.

Die gemeineste Methode ist diese / welche ich bald auf ein Exempel appliciren wil / damit sie desto deutlicher werde. Es sey demnach aus $x^3 + 2xx - 23x - 70 = 0$ die Wurtzel durch Näherung zu suchen: das ist / man sol eine Zahl finden / die dem Werthe von x so nahe kommet als man verlanget.

Setzet demnach $x^3 + 2x^2 = 23x + 70$ und 1 in die Stelle von x / so findet ihr $1 + 2 = 23 + 70$. Derowegen habet ihr für x zu wenig angenommen. Setzet $x = 10$ / so ist $1000 + 200 = 230 + 70$. Derowegen ist x zu groß angenommen. Setzet $x = 5$ so ist $125 + 50 = 115 + 70$. Derowegen ist für x zu wenig genommen. Setzet $x = 6$ / so ist $216 + 72 = 138 + 70$ / und demnach x zu groß angenommen. Setzet $x = 5.5$ $(= 5\frac{5}{10})$ so ist $166375 + 60500 = 126500 + 7000$ (denn $166375 : 1000 + 6050 : 100 = 1265 : 10 + 70$). Derowegen ist 5.5 grösser als x. Nehmet $x = 5.2$ / so habet ihr $140608 + 54080 = 119600 + 70000$ / und also ist 5.2 noch zu groß. Stellet $x = 5.1$ / so ist $132651 + 52020 = 117300 + 70000$ / und demnach 5.1 zu wenig. Setzet $x = 5.15$ / so habet ihr $136590875 + 53045000 =$

118450000 † 7000000 / und also ist 5. 15 zu groß. Stellet $x = 5.14$ / so habet ihr 135796744 † 79258800 = 141220000 † 7000000. Derowegen ist 5. 14. noch zu groß. Setzet $x = 5.13$ so ist 13500 5697 † 52633800 = 117990000 † 70000000 / und demnach x grösser als 5. 13. Wenn ihr nun nicht weiter gehen wollet / könnet ihr entweder $5.\frac{13}{100}$ oder $5.\frac{14}{100}$ für die Wurtzel annehmen.

Anmerckung.

321. Unerachtet diese Methode gar leichte zu begreiffen ist ; so ist sie doch sehr beschweerlich aus zu üben / sonderlich wenn x durch grosse Zahlen multipliciret wird. Derowegen wil ich noch zeigen / wie man durch einen kürtzeren Weg hierzu gelangen kan.

Die 113. Aufgabe.

322. Aus einer jeden vorkommenden Æquation die Wurtzel zuziehen.

Auflösung.

Es sey $x^n . ax^{n-1} . bx^{n-2} . cx^{n-3}\ dx^{n-4}\ ex^{n-5}$ ꝛc. . R $= o$ / in welcher Æquation R das letzte Glied ist / so nichts unbekandtes in sich enthält / $a. b. c. d. e$ aber die bekandten Zahlen / durch welche die Glieder der Æquation multipliciret sind. Nehmet eine Zahl nach belieben an / die der Wurtzel so nahe kommet / als möglich (wie wol dieses nicht schlechter Dinges nothwendig ist / sondern nur zu Erleichterung der Rechnung dienet) und addiret dazu einen unbekandten Theil

oder subtrahiret ihn / nach dem die angenommene Zahl entweder kleiner oder grösser ist als die Wurtzel. Setzet nemlich $m \pm y = x$ / so wird die gegebene Æquation in folgende verwandelt $(m \pm y)^n .\ a(m \pm y)^{n-1}$

$$b(m \pm y)^{n-2} .\ c(m \pm y)^{n-3} .\ d(m \pm y)^{n-4}$$

das ist / wenn ihr jedes Glied würcklich zu seiner gehörigen Dignität erhebet (§. 87) /

$$m^n\ \frac{n-2}{3}.\ \frac{n-0}{1} m^{n-1}y .\ .\ \frac{n-0}{1}.\frac{n-1}{2} m^{n-2}y^2 + \ldots$$

$$\frac{n-0}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.m^{n-3}y^3 \ \&c. \pm am^{n-1} \ldots \frac{n-1}{1}$$

$$am^{n-2}y - - \frac{n-1}{1}.\frac{n-2}{2}.am^{n-3}y^2 - - \frac{n-1}{1}.\frac{n-2}{2}.$$

$$\frac{n-3}{3}am^{n-4}y^3 \ \&c. \pm bm^{n-2} - - \frac{n-2}{1}bm^{n-3}y - -$$

$$\frac{n-2}{1}.\frac{n-3}{2}bm^{n-4}y^2 - - \frac{n-2}{1}.\frac{n-3}{2}.\frac{n-4}{3}bm^{n-5}y^3$$

$$\&c. \pm cm^{n-3} - - \frac{n-3}{1}cm^{n-4}y - - \frac{n-3}{1}.\frac{n-4}{2}$$

$$cm^{n-5}y^2 - - \frac{n-3}{1}.\frac{n-4}{2}.\frac{n-5}{3}cm^{n-6}y^3 \ \&c. \pm$$

$$dm^{n-4} - - \frac{n-4}{1} dm^{n-5}y - - \frac{n-4 \,.\, n-5}{1 \quad 2} dm^{n-6}y^2 - - \frac{n-4 \,.\, n-5 \,.\, n-6}{1 \quad 2 \quad 3} dm^{n-7}y^3 \text{ \&c.} \pm R = o.$$

Weil ihr nicht die Wurtzel gantz gnau ver- verlanget/ sondern nur beynahe; so werffet die Glieder weg/ in welchen eine Dignität von u zu finden/ und behaltet nur $\pm 1 . m^n - - \frac{n-o}{1} m^{n-1}y \pm am^{n-1} - - \frac{n-1}{1} am^{n-2}y \pm bm^{n-2} - - \frac{n-2}{1} bm^{n-3}y \pm cm^{n-3} - - \frac{n-2}{1} cm^{n-4}y \pm dm^{n-4} - - \frac{n-4}{1} dm^{n-5}y$ &c. $\mp R = o$/ so ist $R \mp 1m^n \mp am^{n-1} \mp bm^{n-2} \mp cm^{n-3} \mp dm^{n-4}$ &c. $= nm^{n-1}y \pm (n-1)am^{n-2}y \pm (n-2)bm^{n-3}y \pm (n-3) cm^{n-4}y \pm (n-4)dm^{n-5}y$ &c. folgends

$$y = \frac{R \mp 1m^n \mp am^{n-1} \mp bm^{n-2} \mp cm^{n-4} \pm dm^{n-4} \text{ \&c.}}{nm^{n-1} \pm (n-1)am^{n-2} \pm (n-2)bm^{n-3} \pm (n-3)cm^{n-3} \pm (n-4)dm^{n-5}}$$

Da nun $m + y = x$/ so ist $x = m$

$$\frac{R \mp m^n \mp am^{n-1} \mp bm^{n-2} \mp cm^{n-3}}{nm^{n-1} \pm (n-1)am^{n-2} \pm (n-2)bm^{n-3} \pm (n-3)cm^{n-4} \text{ \&c.}}$$

Das

das ist/

wenn ihr alles unter eine Benennung bringet/

$(nm^n \pm (n-1)am^{n-1} \pm (n-2)\,bm^{n-2} \pm (n-3)cm^{n-3} \pm$
$(n-4)dm^{n-4}$ &c. $+ R + m^n + am^{n-1} + bm^{n-2} +$
$bm^{n-3} + dm^{n-4} : nm^{n-1} \pm (n-1)\,am^{n-2} \pm (n-2)$
$bm^{n-3} \pm (n-3)\,cm^{n-4} \pm (n-4)\,dm^{n-5}$ &c. $=$

(wenn ihr die Glieder von gleicher Art zusammen bringet)

$$\frac{R \pm (n-1)m^n \pm (n-2)am^{n-1} \pm (n-3)\,bm^{n-2} \quad \pm (n-4)\,cm^{n-3} \pm (n-5)\,dm^{n-4} \text{ \&c.}}{nm^{n-1} \pm (n-1)\,am^{n-2} \pm (n-2)\,bm^{n-3} \quad \pm (n-3)\,cm^{n-4} \pm (n-4)\,dm^{n-5}}$$

Wenn der Werth von y mit dem Zeichen + gefunden wird/ so ist er zu groß: wird er aber mit dem Zeichen − gefunden/ so ist er kleiner als er seyn sol. Wenn nun die Wurtzel zu groß heraus kömmet; so nimmet man m etwas kleiner an / und suchet von neuem den Werth von y. Nachdem man öfters die Rechnung erneuret/ kömmet man immer näher dem wahren Werthe der Wurtzel.

Der 1. Zusatz.

323. Wenn $x^n = R$/ so ist $y = \frac{R-m^n}{nm^{n-1}}$ und $x = \frac{R+(n-1)m^n}{nm^{n-1}}$

Die 1. Anmerckung.

324. Durch diese Regel könnet ihr aus allen Irrational-Zahlen die Wurtzel ziehen. Es ist aber dienlich/ daß ihr vorher die allgemeine Regel in eine besondere auf euren Fall verwandelt. Denn wenn $n = 2$/ so ist $y = \frac{R-m^2}{2m}$: wenn $n = 3$/ so ist $y = \frac{R-m^3}{3m^2}$: wenn $n = 4$/ so ist $y = \frac{R-m^4}{4m^3}$: wenn $n = 5$/ so ist $y = \frac{R-m^5}{4m^4}$ &c. In allen Fällen ist $x = y + m$.

Z. E. Es sol aus 2 die Qvadrat-Wurtzel gezogen werden; so ist $R = 2$.

Setzet $m = 1$/ so ist $R-m^2, : 2m = 2-1, : 2 = \frac{1}{2}$
$x = 1,0 + \frac{5}{10} = 1,5$

Setzet $m = 1.5$/ so ist $R-m^2, : 2m = 200-225, : 30 = 0.250 : 30 = 0.083$/ $x = 1.500-0.083 = 1.417$.

Setzet $m = 1.417$/ so ist $R-m^2, : 2m = 2.000000-2007889, : 2834 = -0.02783$/ $x = 1.417000-2783 = 1.414217$.

Setzet $m = 1.414217$/ so ist $R-m^2, : 2m = 2.000000000000-2000009723089, : 2.828434 = -0.000003437622$/ $x = 1414217$ 000-

000000--0. 000003437622 = 1.414213562 378.

Wiederumb es sol aus 3 die Qvadrat-Wurtzel gezogen werden. Dann ist R = 3.

Setzet $m = 2$/ so ist $R - m^2,: 2m = 3-4,: 4 = -\frac{1}{4}$/ $x = 1\frac{3}{4} = 1\frac{7}{10} = 1.7$.

Setzet $m = 1.7$/ so ist $R - m^2,: 2m = 300 - 289,: 34 = 0.032$, $x = 1.700 + 0.032 = 1732$.

Setzet $m = 1.732$/ so ist $R - m^2,: 2m = 30000000 - 2999824,: 3464 = \frac{0.000176}{5464} = 0.000050$/ $x = 1.732000 + 0.000050 = 1.732050$ u. s. w. Jemehr ihr an den Werth von y Nullen anhänget/ je mehr nimmet der Werth der Wurtzel zu; und obgleich die letzten Zahlen nicht zutreffen/ so wird doch der Irrthum in der folgenden Operation stets gehoben.

Der 2. Zusatz.

325. Wenn $x^2 - px = R$/ so ist $y = (R + m^2 - pm):(2m-p)$. Wenn $x^2 + px = R$/ so ist $y = (R - m^2 - pm):(2m-p)$. Wenn $x^2 - px = -R$, so ist $y = (R + m^2 - pm):(p-2m)$. Z. E. Es sey $x^2 - 5x = 31$. Dann ist $R = 31$/ $p = 5$.

Setzet $m = 8$/ so ist $R + m^2 + pm,:, 2m - p = 31 - 64 + 40,:, 16 - 5 = 7: 11 = 0,6$/ $x = 8 + 0,6 = 8.6$.

Setzet $m = 8.6$/ so ist $R - m^2 + pm, :, 2m - p = 3100 - 7396 + 7400, :, 17.2 - 5.0$/ $x = 0.04 : 12.2 = 0.0032$.
$x = 8.6000 + 0.0032 = 8.6032$.

Setzet $m = 8.6032$/ so ist $R - m^2 + pm, :, 2m - p = 31.00000000 - 7401505024 + 4.301600000, :, 172064 - 50000 = 0.000094976 : 12.2064 = 0.0000077808$/ $x = 8.6000000000 + 0.0000077808 = 8.603277808$.

Der 3. Zusatz.

326. Wenn $x^3 + qx = R$, so ist $y = R - m^3 - qm, :, 3m^2 + q$. Eben so/ wenn $x^3 + px^2 + qx = R$/ ist $y = R - m^3 + pm^2 + qm, :, Rm + 3m^2 + 2pm$.

Die 1. Anmerckung.

327. Auf eine gleiche Weise können für alle andere Æquationen Regeln hergeleitet werden / dadurch man aus ihnen die Wurtzeln ziehen kan. Nur ist zu mercken/ daß die Glieder / welche in der Æquation fehlen/ auch in der Regel ausgelassen werden. Z. E. in der vorigen Gleichung $x^3 + qx = R$ fehlet px^2/ da nun mit p in der Regel das a übereinkommet / so bleibet am^{n-1} aus dem Zehler und am^{n-2} aus dem Nenner weg. Es hat aber *Edmundus Halley* durch Veranlassung einiger Regeln des de Lagny von Ausziehung der Cubic- und fünften Wurtzel noch andere Regeln erfunden / durch welche sich aus einer jeden Gleichung die Wurtzeln viel geschwinder als durch alle übrige Methoden/ so von andern erdacht worden/ ausziehen lassen : Derowegen wird es nützlich seyn/ wenn

wenn ich dieselbe aus unserer General-Gleichung herleite.

Der 4. Zusatz.

328. Setzet in der General-Æquation
$--m^n--am^{n-1}--bm^{n-2}--cm^{n-3}$ &c. $= p$
$--\frac{n-0}{1}m^{n-1}y--\frac{n-1}{1}am^{n-2}y--\frac{n-2}{1}bm^{n-3}y$
$--\frac{n-3}{1}cm^{n-4}y$ &c. $=qy--\frac{n-0}{1}.\frac{n-1}{2}m^{n-2}y^2$
$--\frac{n-1}{1}.\frac{n-2}{2}am^{n-3}y^2 \,..\, \frac{n-2}{1}.\frac{n-3}{2}bm^{n-4}y^2 =$
ry^2 u. s. w. so bekommet ihr $p--qy--ry^2$
$--sy^3$ &c. $--R=0$. Derowegen ist $p=--qy$
$--ry^2--sy^3$ &c. $--R$. Wenn ihr also den Werth von y nur beynahe verlanget/ setzet $p=qy$/ so ist $y=p:q$. Weil aber dieses noch zu viel fehlen würde; setzet $p=--qy--ry^2$; so ist $y=p:(q\pm ry)=$ (wenn ihr den vorigen Werth von y in die Stelle setzet) $p:(q\pm y^4 rp)$ $=qp:(qq\pm rp)$. Demnach ist $x=m\pm y=m\pm pq:(qq\pm rp)$/ welches die Rational-Regel ist/ die Halley giebet/ aus einer jeden unreinẽ Æquation die Wurtzel zu ziehen. Denn weil m der Wurtzel sehr nahe kömmet / so ist y ein sehr kleiner Theil derselben/ und also sind die Dignitäten von y in Ansehung

hung derer von m noch viel kleinerer/ ie höher sie steigen/ und können dahero weggelassen werden / wo man aus Kleinigkeiten nichts machet.

Der 5. Zusatz.

329. Wenn ihr wie vorhin $\pm p = qy \pm ry^2$ setzet/ so ist $\frac{1}{4}qq \pm p = \frac{1}{4}qq + qy \pm ry^2$/ oder $y^2 \pm qy:r + \frac{1}{4}qq:rr = (\frac{1}{4}qq \pm pr):r^2$ und daher $y = (\frac{1}{2}q \cdot\cdot \surd(\frac{1}{4}qq \pm pr)):r$/ folgends $x = m + (\frac{1}{2}q \cdot\cdot \surd(\frac{1}{4}qq \pm pr)):r$, welches die Irrational-Regel ist/ die Halley giebet/ aus einer jeden unreinen Æquation die Wurtzel zu ziehen.

Die 2. Anmerckung.

230. Wenn ihr die Rechnung von neuem anfanget/ müsset ihr für m den vorher gefundenen Werth von x annehmen/ wie vorhin geschehen (§. 324. 325.)

Die 3. Anmerckung.

331. Damit ihr p/ q und r finden könnet/ habet ihr das Täfelein nöthig/ welches zu Formirung der Potentzen §. 87. p. 49 gegeben worden: wie aus folgenden Exempeln erhellen sol. Es ist aber zu mercken/ daß $m + y = x$/ wenn R und p einerley; hingegen $m - y = x$/ wenn sie verschiedene Zeichen haben. Oder es ist $m + y = x$/ wenn p und r verschiedene/ und $m - y = x$/ wenn sie einerley Zeichen haben. Wenn p und r einerley Zeichen haben/ so ist $y = (q\frac{1}{2} - \surd\frac{1}{4}qq - pr)):r$; wenn sie aber verschiedene Zeichen haben/ so ist $y = (\surd(\frac{1}{4}qq + pr) + \frac{1}{2}q):r$

Die

Die 4. Anmerckung.

332. Damit der Gebrauch dieser Regel erhelle/ so wil ich ein Exempel hinzu setzen. Es sey $x^3 + 438x^2 - 7825x - 98508430 = 0$.

1. Setzet $m = 300$/ so ist

$$x^3 = +27000000 + 270000y + 900y^2 + y^3$$
$$+ \,..\, x^2 = +39420000 + 262800y + 438y^2$$
$$- \,..\, x = -2347500 \quad 7825y$$
$$- \quad R = -34435930$$

Das ist $-34435930 + 524975y + 1338y^2 = 0$
oder $-p \quad + qy \quad + ry^2 = 0$

Da nun R und p einerley Zeichen/ oder auch p und r verschiedene Zeichen haben/ so ist m kleiner als die gesuchte Wurtzel/ und demnach $x = m + y$.

Setzet in die Regel $y = p:(p + pr:q)$ die Werthe von $p = 34435930$ und von $q = 524975$; so bekommet ihr $34435930:(524975 + 4607527434 0:524975) = 34435930:612739 = 56.2$

Derowegen ist $x = 300 + 56.2 = 356.2$

2. Stellet nun von neuem $m = 356$/ so ist vermöge des Dignitäten-Täfeleins (§. 87)

$$x^3 = +45118016 + 380208y + 1068y^2 + y^3$$
$$+ \,..\, x^2 = +55570368 + 311856y + 438y^2$$
$$- \,..\, x = -2785700 \quad - \quad 7825y$$
$$- \,..\, R = -98508430$$

Das ist $-665746 + 684239y + 1506y^2 = 6$
oder $-p \quad + qy \quad + ry^2 = 0$

Weil

Weil R und p einerley/ p und r aber verschiedene Zeichen haben/ so ist abermal $x = m + y$. Setzet wie vorhin in der Regel $y = p : (p + pr : q)$ die Werthe von $p = 665746$ / $q = 684239$ und $r = 1506$; so bekommet ihr $y = 970894$. Derowegen ist $x = 356.970894$

Wollet ihr die Wurtzel noch gnauer haben/ so könnet ihr von neuem $m = 356970894$ stellen. Eben auf solche Art könnet ihr durch die Irrational-Regel die verlangte Wurtzel suchen. Denn

1. Setzet/ wie vorhin $m = 300$/ so findet ihr abermal $p = 34435930$ / $q = 52497$ / $r = 1338$. Diese Werthe setzet in die Irrational-Regel $y = (\sqrt{(\frac{1}{4}qq + pr)} - \frac{1}{2}q) : r$ / so bekommet ihr $y = 57$ und $x = 357$.

2. Stellet von neuem $m = 357$/ so ist $x = m + 357$

$$x^3 = + 45499293 - 382347y + 1071y^2 + y^3$$
$$+ -.x^2 = + 55822662 - 312732y + 438y^2$$
$$-..x = - 2793525 + 7825y$$
$$-R = - 98508830$$

---

das ist $+ 20000 - 687254y + 1509y^2 = o$

oder $+ p - qy + ry^2 = o$

Weil R und p verschiedene/ oder auch p und r einerley Zeichen haben/ so ist $m - y = x$.

Wenn ihr nun die von neuem gefundenen Werthe von p. q und r in die Irrational-Regel setzet; bekommet ihr $y = (\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}qq - pr)} : r$ 02910318180. Derowegen ist $x = 356.9708968182$.

Es sey $x^3 - 17x^2 + 54x - 350 = 0$.

Setzet $m = 10$, folgends $10 + y = x$, so ist

$$x^3 = 1000 + 300y + 30y^2 + y^3$$
$$-17x^2 = -1700 - 340y - 17y^2$$
$$+54x = +540 + 54y$$
$$-R = -550.$$

---

das ist, $-510 + 14y + 13y^2 = 0$

oder $-p + qy + ry = 0$

Weil R und p einerley, oder auch p und r verschiedene Zeichen haben, so ist m zu kleine angenommen, und demnach $m + y = x$. Weil nun p und r verschiedene Zeichen haben, so ist $y = (\sqrt{(\frac{1}{4}qq + pr)} - \frac{1}{2}q) : r = (\sqrt{(49 + 6630)} - 7) : 13 = (\sqrt{6679} - 7) : 13 = 5.7$, und also $x = 100 + 57 = 15.7$.

Stellet nun ferner $15 = m$, oder $15 + y = x$ so ist

$$x^3 = +3375 + 675y + 45y^2 + y^3$$
$$-17x^2 = -3825 - 510y - 17y^2$$
$$+54x = +810 + 54y$$
$$-R = -350$$

$$+10 + 219y + 28y^2 = 0$$
$$+p + qy + ry^2 = 0$$

Weil p und R verschiedene, p aber und r einerley Zeichen haben, so ist die Wurtzel etwas zu groß angenommen, und demnach $m - y = x$. Da aber p und r einerley Zeichen haben, so ist $y = (\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}qq - pr)}) : r = (109\frac{1}{2} - \sqrt{(11990\frac{1}{4} - 280)}) : 28 = (109\frac{1}{2} - \sqrt{11710\frac{1}{4}}) : 28 = 0.045932$. Derowegen $x = 15 - y = 14.954068$.

Die

Die 6. Anmerckung.

333. Die Anfänger haben sich wohl in acht zu-nehmen/ daß sie sich nicht mit den Decimal-Brüchen confundiren: welches sie aber leicht vermeiden kön-nen/ wenn sie nur bedencken/ daß sie so viel Zahlen für die Decimal-Brüche rechnen müssen/ als sie Nul-len bey der Division angehängt in der Rational-Re-gel/ oder halb so viel/ als sie Nullen hinzugesetzt bey Ausziehung der Qvadrat-Wurtzel in der Irrational-Regel. Derowegen wenn in beyden Fällen weni-ger Zahlen nach geschehener Division oder Auszie-hung der Wurtzel heraus kommen/ müssen zur rech-ten so viel Nullen vorgesetzt werden als Zahlen feh-len. Hingegen umb wie viel Zahlen der Decimal-Bruch durch die neue Operation vermehreter her-aus kommet; so viel Nullen müssen der angenom-menen Wurtzel beygefügt werden/ ehe ihr den Werth von ihr abziehen/ oder ihn zu ihr addiren könnet.

Die 7. Anmerckung.

334. Je öfters man die Rechnung von neuem anfängt/ je näher kommet man der wahren Wurtzel. Da man nun aber selten in so viel Zahlen sie zu wissen verlangt/ als in der anderen Operation heraus kom-men: hat *Halley* noch eine Regel gegeben/ wie man die in der andern Operation gefundene Wurtzel cor-rigiren kan/ damit sie der wahren näher komme und also nicht erst die dritte anstellen darf. Nemlich wenn $+y$ ist/ müsset ihr in Cubischen $\frac{1}{2}m^3 : V(\frac{1}{4}qq + pr)$/ in Qvadrato-Qvadratischen Æqua-tionen $(\frac{1}{2}sm^3 + \frac{1}{2}m^4) : V(\frac{1}{4}qq + pr)$ u. s. w. addiren; hingegen wenn $+y$ ist/ in dem ersten Falle $\frac{1}{2}m^3 : V(\frac{1}{4}qq - pr)$/ im andern $(\frac{1}{2}sm^3 - \frac{1}{2}m^4) : V(\frac{1}{4}qq - pr)$ u. s. w. subtrahiren/ damit der gefundene Werth von x der wahren Wurtzel

näher

näher komme. Wir wollen das Exempel behalten/ welches *Halley* selbst giebet/ weil es als ein sonderbahres angeführet wird von denjenigen / welche die Wurtzeln durch Näherungen aus den Gleichungen zu suchen sich bemühet. Es sey nemlich $x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14937x + 5000 = 0$. Dividiret die Wurtzel durch 10/ damit die Operation nicht verdrüßlich fället.

$$x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14937x + 5000 = 0$$
$$1 \quad 10 \quad 100 \quad 1000 \quad 10000$$

$$z^4 - 8z^3 + 169\tfrac{40}{50}z^2 - 14\tfrac{227}{1000}z + 0.5 = 0$$

Umb die Brüche zu vermeiden / nehmet für diese Æquation an $z^4 - 8z^3 + 20z^2 - 15z + 0.5$ oder $0.5 = -z^4 + 8z^3 - 20z^2 + 15z$.

Setzet $m = 1$/ so ist $1 + y = z$

$$-z^4 = -1 - 4y - 6y^2 - 4y^3 - y^4$$
$$+8z^3 = +8 + 24y + 24y^2 + 8y^3$$
$$-20z^2 = -20 - 40y - 20y^2$$
$$+15z = +10 + 15y$$
$$-R = -0.5$$

---

das ist $+1.5 - 5y - 2y^2 + 4y^3 - y^4 = 0$

oder $+p - qy - ry^2 + sy^3 = 0$

Weil R und p verschiedene Zeichen haben / so ist m zu groß angenommen und daher $m - y = 0$. Und weil p und r verschiedene Zeichen haben ; so ist $y = (\sqrt{(\frac{1}{4}qq + pr)} - \frac{1}{2}q) : r = (\sqrt{37} - 5) : 4 = (6.08 - 500) : 4 = .27$/ und demnach $z = 1.27$.

Stellet nun von neuem $1.27 = m$/ so ist

$$-26014.4641 - 8193.532y - 967.74y^2 - 508y^3 - y^4$$

$-163870.640 + 38709.60y + 3048y^2 + 80y^3$
$+322257.42 - 50749.2y - 1998y^2$
$+1896699.9 + 14937\,y$
-5000

Das ist / $+298.6559 - 5296.132y + 82.26y^2 + 29.2y^3 = 0$

oder $+ p - qy + ry^2 + sy^3 = 0$

Weil R ($= 5000$) und p verschiedene Zeichen haben / so ist $m - y = x$ / und da p und r einerley Zeichen haben $y = (\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}qq - pr)}) : r = (2648.066 - \sqrt{(6987686.106022)} : 82.26 = .0564408033$ - - - -

Wollet ihr nun diesen Werth corrigiren / so müsset ihr $(\frac{1}{2}sm^3 - \frac{1}{2}m^4) : \sqrt{(\frac{1}{4}qq - pr)}$ dazu addiren.

Nun ist $(\frac{1}{2}sm^3 - \frac{1}{2}m^4) : \sqrt{(\frac{1}{4}qq - pr)} = .0026201 \ldots : 2643.432 \ldots = .00000099117$. Derowegen ist $y = 05644179448$ und $z = 12.75644179448$. Es ist zu erinnern / daß / wenn ihr die Werthe von $p.q.r.$ und $s.$ suchet / in den Producten von 20 in z^2 und 15 in z so viel wieder abgezogen wird / als 20 und 15 zu groß angenommen worden. Z. E. An stat $19\frac{28}{100}z^2$ habet ihr $20z^2$ genommen / und also $\frac{1}{50}$ zu viel. Derowegen wenn ihr den Werth von z^2 durch 20 oder vielmehr 2000 multipliciret / müsset ihr $\frac{1}{50}$ desselben von dem Producte wieder abziehen. Als im ersten Gliede ist das Product aus 16129 in 20000 = 32258000 / $\frac{1}{50}$ aber von 16129 = 32258. Wenn ihr nun dieses von 32258000 abziehet / bleibet das wahre Product 3225742 übrig. Eben so verhält sichs in den übrigen Gliedern.

Die

Die 8. Anmerckung.

335. Nun könnte ich auch zeigen/ wie der Werth von x in den gegebenen Æquationen Geometrisch gesucht werde. Allein weil die Geometrische Construction der determinirten Aufgaben sich am besten aus der Construction der undeterminirten herleiten läst; wil ich zu erst Arithmetische Exempel von dergleichen Aufgaben beybringen/ zu mal da dieselben in der höheren Geometrie und der Differential-Rechnung mehr Nutzen haben/ als wohl einige vermeinen/ auch besondere Kunstgriffe nachzusinnen an die Hand geben.

Von undeterminirten Aufgaben.

Die 114. Aufgabe.

336. **Vier Zahlen von der Beschaffenheit zufinden/ daß die Summe der beyden ersten der dritten und ihre Differentz der vierdten Zahl gleich sey.**

Auflösung.

Es sey die erste Zahl x/ die andere y/ die dritte z/ die vierdte t/ so ist

$y + x = z$	$x - y = t$
$2y + t = z$	$x = t + y$
$2y = z - t$	$x = t + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t$
$y = (z - t) : 2$	$x = (z + t) : 2$

Da nun nicht mehr Æquationen zu erdencken sind/ können die Zahlen z und t nach belieben angenommen werden. Es sey $z = 8$/ $t = 2$/

so ist $x = (8+2):2 = 10:2 = 5$ / und $y = (8-2):2 = 6:2 = 3$. Es sey $z = 5$ / $t = 1$ / so ist $x = (5+1):2 = 6:2 = 3$ / $t = (5-1):2 = 4:2 = 2$.

Anmerckung.

337. Wenn ihr gantze Zahlen verlanget / so müssen vor z und t solche angenommen werden / deren Summe und Differentz sich durch 2 dividiren läst.

Die 115. Aufgabe.

338. **Zwey Zahlen zu finden / deren Summe zu gleich mit ihrem Producte einer gegebenen Zahl gleich ist.**

Auflösung.

Es sey die gegebene Zahl $= a$ / die eine von den begehrten $= x$ / die andere $= y$ / so ist

$$xy + x + y = a$$

$$xy + x = a - y$$

$$x = (a-y):(y+1)$$

Es sey $a = 30$ / $y = 2$ / so ist $x = (30-2):(2+1) = 28:3 = 9\frac{1}{3}$. Es sey $a = 20$ / $y = 2$ / so ist $x = (20-2):(2+1) = 18:3 = 6$. Es sey $a = 19$ / $y = 4$ / so ist $x = (19-4):(4+1) = 15:5 = 3$.

Die 116. Aufgabe.

339. **Zwey Zahlen zufinden / deren Product ein vollkommener Cubus ist / dessen Wurtzel dem Producte aus der ersten in das Quadrat der andern gleich ist.**

Auf-

Auflösung.

Es sey die erste Zahl = x, die andere = y, die Cubic-Wurtzel = v, so ist

$$v = xy^2 \qquad xy = v^3$$

$$v : y^2 = x \qquad x = v^3 : y$$

$$v : y^2 = v^3 : y$$

$$vy = v^3 y^2 \quad | \; vy$$

$$1 = v^2 y$$

$$1 : v^2 = y$$

Derowegen ist $v^5 = x$

Setzet $v = 2$, so ist $x = 32$, $y = \frac{1}{4}$. Es sey $v = 3$, so ist $x = 243$, $y = \frac{1}{9}$.

Die 117. Aufgabe.

340. Die Summe zweyer vollkommenen Qvadrate in zwey andere vollkommene Qvadrate zutheilen.

Auflösung.

Es sey die Seite des grösten Qvadrates = a, des kleinesten = b: die Seite des einen von den gesuchten $a - z$, des andern $yz - b$. So ist

$$aa - 2az + zz + y^2z^2 - 2byz + bb = aa + bb$$

$$zz + yyzz = 2byz + 2az \quad | \; z$$

$$z + yyz = 2by + 2a$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; 1 + y^2$$

$$z = (2by + 2a) : (y^2 + 1)$$

Also ist $= a - z = a - (2by + 2a) : (y^2 + 1) = (ay^2 - a - 2by + 2a) : (y^2 + 1) = (ay^2 - 2by - a) : (y^2 + 1)$. Hingegen $yz - b = (2by^2 + 2ay) : (y^2 + 1) - b = (2by^2 + 2ay + by^2 - b) : (y^2 + 1) = (by^2 + 2ay - b) : (y^2 + 1)$. Es sey $a = 3$ / $b = 2$ / $y = 2$ so ist $z = (8 + 6)$ $5 = 14 : 5$ / folgends $a - z = 3 - 14 : 5 = \frac{1}{5}$ / und $yz - b = 28 : 5 - 2 = (28 - 10) : 5 = 18 : 5$ deren Quadrate $(1 - 324) : 25 = 103 = 9 + 4$.

Die 118. Aufgabe.

341. **Zwey vollkommene Quadrate zufinden/ deren Differentz einer gegebenen Zahl gleich ist.**

Auflösung.

Es sey die Seite des kleinen $= x$ / des grossen $x + y$ / die Differentz $= d$. So ist das kleine Quadrat $= x^2$ / das grosse $= x^2 + 2xy + y^2$ / folgends

$$y^2 + 2xy = d$$

$$2xy = d - y^2$$

$$x = (d - y^2) : 2y$$

Weil sich y^2 von d abziehen läst / so muß y kleiner seyn als $\sqrt{d}$.

Z. E. Es sey $d = 10$ / $y = 3$ / so ist $x =$

(10-

$(10-9):6 = \frac{1}{6}$, $x+y = 3+\frac{1}{6}$. Es sey $d = 11$, $y = 2$, so ist $x = (11-4):4 = \frac{7}{4}$, $x+y = 2+\frac{7}{4} = {}^{15}$.

Die 119. Aufgabe.

342. Eine Zahl in zwey andere zu zertheilen, deren Product ein vollkommenes Qvadrat ist.

Auflösung.

Es sey die Zahl $= 2a$, die Differentz $= 2y$, so ist die grosse $a+y$, die kleine $a-y$, ihr Product $= aa-yy$. Setzet die Seite des Qvadrates $xy-a$. So ist

$$aa-yy = aa-2axy+x^2y^2$$

$$\overline{}$$

$$2axy = x^2y^2+y^2$$

$$\overline{}\;y$$

$$2ax = x^2y+y$$

$$\overline{}\;x^2+1$$

$$2ax:(x^2+1) = y$$

Es sey $x = 2$, $2a = 10$, so ist $y = 20:5 = 4$, $a+y = 5+4 = 9$, $a-y = 5-4 = 1$.

Es sey $2a = 10$, $x = 0$, so ist $y = 0$, folgends $a+y = 5$, $a-y = 5$.

Es sey $2a = 10$, $x = 3$, so ist $y = 30:10 = 3$, $a+y = 5+3 = 8$, $a-y = 5-3 = 2$.

Die 120. Aufgabe.

343. Zwey Zahlen zu finden von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine zu

dem Qvadrate der andern gesetzt wird die Summe ein Qvadrat sey/ deren Seite die Summe der Zahlen ist.

Auflösung.

Es sey die eine Zahl x/ die andere y/ so ist

$$x^2 + y = x^2 + 2xy + y^2$$

$$y - y^2 = 2xy$$

$$\frac{y - y^2}{2y}$$

$$(1-y):2 = x$$

Es sey $y = \frac{1}{2}$/ so ist $x = \frac{1}{2}:2 = \frac{1}{4}$. Es sey $y = \frac{1}{3}$/ so ist $x = (1 - \frac{1}{3}):2 = \frac{2}{3}:2 = \frac{1}{3}$.

Die 121. Aufgabe.

344. Zwey Zahlen zu finden von der Beschaffenheit/ daß/ wenn die eine zu dem Qvadrate der andern gesetzt wird/ die Summe die Seite eines Qvadrates sey so den beyden Zahlen gleich ist.

Auflösung.

Es sey die eine Zahl x die andere y/ so ist

$$z^2 + y = \sqrt{(z+y)}$$

$$z^4 + 2z^2y + yy = z + y$$

$$z^4 + 2z^2y - y + yy = z$$

Das ist wenn $2z^2 - 1 = v$

$$vy + yy = z - z^4$$

$\frac{1}{4}v^2$

$$\frac{1}{4}v^2 + vy + yy = \frac{1}{4}v^2 + z - z$$

$$\frac{1}{2}v + y = \sqrt{(\frac{1}{4}v^2 + z - z^4)}$$

$$y = \sqrt{(\frac{1}{4}v^2 + z - z^4)} - \frac{1}{2}v$$

das ist, wenn ihr für v wieder seinen Werth in die Stelle setzet

$$y = \sqrt{(z^4 - 2z^2 + \frac{1}{4} + z - z^4)} - z^2 + \frac{1}{2}$$

das ist $y = \sqrt{(\frac{1}{4} + z - z^2)} + \frac{1}{2} - z2$

Wenn ihr nun Rational-Zahlen verlanget, so muß $\frac{1}{4} + z - z^2$ ein vollkommen Qvadrat seyn.

Setzet demnach seine Seite $= zx - \frac{1}{2}$, so ist

$$z^2x^2 - zx + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + z - z^2$$

$$z^2x^2 - zx = z - z^2$$

$$zx^2 - x = 1 - z$$

$$zx^2 + \ = x + 1$$

$$z = (x+1) : (x^2+1)$$

Es sey $x = 2$, so ist $z = (2+1) : (4+1) = \frac{3}{5}$, folgends $y = \frac{1}{2} - \frac{9}{25} + \sqrt{(\frac{1}{4} + \frac{3}{5} - \frac{9}{25})} = (5-19) : 50 + \sqrt{(25 + 24. : 100)} = 7 : 50 + \sqrt{(49 : 100)} = \frac{7}{50} + \frac{7}{10} = \frac{70 + 350}{500} = \frac{420}{500} = \frac{21}{25}.$

Die 122. Aufgabe.

345. Zwey Qvadrate von der Beschaffenheit zu finden, daß wenn ihr das eine zu dem Producte von beyden addiret,

ret/ eine jede Summe ein vollkommenes Quadrat sey.

Auflösung.

Es sey das eine Quadrat x^2/ das andere y^2/ so ist ihr Product $x^2 y^2$ folgends sind $x^2 y^2 + x^2$ und $x^2 y^2 + y^2$ vollkommene Quadrate. Dividiret das erste durch x^2/ das andere durch y^2/ so sind $y^2 + 1$ und $x^2 + 1$ gleichfals vollkommene Quadrate. Nennet die Seite des ersten $z - y$/ das andern $t - x$/ so ist

$y^2 + 1 = z^2 - 2zy + y^2$	$x^2 + 1 = t^2 - 2tx + x^2$
$1 = z^2 - 2zy$	$1 = t^2 - 2tx$
$1 + 2zy = z^2$	$2tx = t^2 - 1$
$y = (z^2 - 1) : 2z$	$x = (t^2 - 1) : 2t$

Es sey $z = 2$/ $t = 3$/ so ist $y = (4-1) : 4 = \frac{3}{4}$ $x = (9-1) : 6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

Es sey $z = 3$/ $t = 4$/ so ist $y = (9-1) : 6 = (9-1) : 6 = \frac{4}{3}$/ $x = (16-1) : 8 = \frac{15}{8}$.

Die 123. Aufgabe.

346. Zwey Quadrate zu finden/ von der Beschaffenheit/ daß/ wenn ihre Summe zu ihrem Producte gesetzt wird/ ein vollkommenes Quadrat heraus kommet.

Auflösung.

Es sey das eine Quadrat x^2/ das andere y^2/ so ist $x^2 y^2 + x^2 + y^2$/ ein vollkommenes Quadrat. Setzet anfangs

y^2

$$y^2 - 2ty + tt = yy + 1$$

so ist $t^2 = t + 2ty$

$$(t^2 - 1) : 2t = y$$

$$t - y = t - (t - 1) : 2t_2 = (t^2 + 1) : 2t$$

Setzet ferner $v = \sqrt{(yy + 1)} = t - y = (t^2 + 1) : 2t$ / so ist $x^2y^2 + x^2 + y^2 = x^2v^2 + y^2$. Stellet dessen Seite $= z - vx$ / so ist

$$x^2v^2 + y^2 = z^2 - 2vxz + v^2x^2$$

$$y^2 = z^2 - 2vxz$$

$$2vxz = z^2 - y^2$$

$$x = (z^2 - y^2) : 2vz$$

hier werden z und t nach Gefallen angenommen.

Es sey Z. E. $z = 2$ / $t = 3$ / so ist $y = (9 - 1)$ $6 = 8 : 6 = \frac{4}{3}$ / $v = t - y = 3 - \frac{4}{3} = \frac{9 - 4}{3} = \frac{5}{3}$

und also $x = (4 - \frac{16}{9}) : \frac{20}{3} = \frac{36 - 16}{9} : \frac{20}{3} =$

$\frac{20}{9} : \frac{20}{3} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$.

Die 124. Aufgabe.

347. Zwey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden / daß / wenn ihr Product zu der Summe ihrer Qvadrate gesetzt wird / ein vollkommenes Qvadrat heraus kommet.

Auflösung.

Es sey die Summe der beyden Zahlen $2x$, ihre Differentz $2y$, die Seite des Qvadrates $t+y$, so ist die grosse Zahl $x+y$, die kleine $x-y$, und demnach

$$x^2-y^2+x^2+2xy+yy+x^2-2xy+yy, \text{ das ist,}$$

$$3x^2+y^2-t^2=2ty+yy$$

$$3x^2-t^2=2ty$$

$$2t$$

$$(3x^2-t^2):2t=y$$

Es sey $x=4$, $t=6$, so ist $y=(48-36):12=12:12=1$, folgends $x+y=4+1=5$, $x-y=4-3=1$.

Die 125. Aufgabe.

348. Eine Zahl von der Beschaffenheit zufinden, daß, wenn sie durch zwey bekandte Zahlen multipliciret wird, beyde Producte ein vollkommenes Qvadrat sind.

Auflösung.

Es sey eine gegebene Zahl $=a$, die andere b, die gesuchte x, das eine Qvadrat y^2, das andere v^2, so ist

$$ax=y^2 \qquad bx=v^2$$

$$x=y^2:a \qquad x=v^2:b$$

$$y^2:a=v^2:b$$

$$by^2=av^2:b$$

$$y^2 = av^2 : b$$

$$y = v\sqrt{(a:b)}$$

Wenn demnach eine Rational-Zahl gefunden werden sol/ muß $a:b$ ein vollkommenes Qvadrat seyn.

Es sey $a=32$/ $b=8$/ so ist $\sqrt{(a:b)} = 2$. Setzet $v=5$/ so ist $y=10$/ folgends $x=100 : 32 = \frac{25}{8}$.

Die 126. Aufgabe.

349. **Eine Zahl zu finden von der Beschaffenheit/ daß/ wenn sie durch zwey gegebene Zahlen multipliciret/ und zu jedem Producte noch eine andere Zahl addiret wird/ beyderseits ein vollkommenes Qvadrat heraus kommet.**

Auflösung.

Es seyn die ersten beyden gegebenen Zahlen a und b/ die andern c und d/ die gesuchte x/ die beyden Qvadrate yy und vv/ so ist

$$ax + c = yy \qquad bx + d = vv$$

$$x = (yy-c):a \qquad x = (vv-d):b$$

$$(yy-c):a = (vv-d):b$$

$$byy - bc = avv - ad$$

$$byy = av^2 - ad + bc$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad b$$

$$y^2 = (av^2 - ad + bc):b$$

y=

$$y = \sqrt{(av^2 - ad + bc) : b}$$

Wenn ihr nun eine Rational-Zahl verlanget/ setzet $a : b = m^2$/ so ist

$$y^2 = m^2v^2 - m^2d + c$$

Setzet ferner für die Seite dieses Qvadratee $t - mv$ oder $mv - t$/ so ist

$$m^2v^2 - m^2d + c = m^2v^2 - 2tmv + t^2$$

$$2tmv = t^2 + m^2d - c$$

$$v = (t^2 + m^2d - c) : 2tm$$

das ist/ wenn ihr für m^2 seinen Werth wieder hinsetzet $v = (bt^2 + ad - bc) : 2tbm$.

Es sey $t = 4$/ $a = 1$/ $b = 1$/ $c = 2$/ $d = 3$/ so ist $m^2 = 1 : 1 = 1$ und $m = 1$/ folgends $v = (16 + 3 - 2) : 8 = 17 : 8 = 2\frac{1}{8}$ und $x = 289 : 64 - 3 = (289 - 192) : 64 = 97 : 64$.

Von den Geometrischen Oertern.

Die 34. Erklährung.

350. Die Linie/ durch welche eine undeterminirte Aufgabe Geometrisch aufgelöset wird/ heisset ein Geometrischer Ort/ (Locus Geometricus). Insbesondere nennet man es einen Ort an einer geraden Linie/ wenn sie eine gerade Linie ist: einen Ort an dem Circul/ wenn sie ein Circul ist: einen Ort an der Parabel/ Hyperbel/ Ellipsi u. s. w. wenn sie eine von diesen Linien ist.

Die

Die 35. Erklährung.

351. Der Ort an einer geraden Linie wird auch ein einfacher Ort; der an einem Circul/ ein ebener Ort; (Locus planus); der an einer Parabel/ Hyperbel und Ellipsi ein cörperlicher Ort (Locus solidus) genennet.

Die 127. Aufgabe.

351. Einen Ort an einer geraden Linie zu coostruiren.

Auflösung.

Einen Ort construiren heisset die Linie ziehen/ welche der undeterminirte Aufgabe ein Gnügen thut. Alle Oerter an einer geraden Linie lassen sich durch folgende Æquationen vorstellen: $y = ax : b$ / $y = (ax : b) + c$ / $y = c - ax : b$ construiret nach Belieben einen Winckel EAD / nehmet in demselben an $AB = b$ / $BC = a$ / so ist $AD = x$ / $DE = y$. Denn $AB : BC = AD : DE$ (§. Geom.) das ist / $b : a = x : y$ / folgends $ax : b = y$. Tab. II. Fig. 21.

In dem andern Falle darf nur eine gegebene Linie c allzeit zu DE gesetzt / oder davon subtrahiret werden.

In dem dritten Falle wird DE von einer gegebenen Linie abgezogen.

Es ist aber nicht nöthig zu erinnern / daß AD oder x auf AG so groß angenonmen werden darf / als man wil.

Die 128. Aufgabe.

352. Einen Ort an einem Circul zu construiren.

Auflösung.

I. Es sey $yy = aa - xx$ / beschreibet mit $BC = a$ einen Circul / und machet $CE = x$ / so ist $ME = y$.

Beweiß.

Denn $AE = a + x$ / $EB = a - x$. Nun ist $AE . EB = (ME)^2$ (§. 195 Geom. §. 126 Alg.) Derowegen ist $aa - x^2 = y^2$. W. Z. E.

II. Es sey $yy = bx - xx$. Nehmet das andere Glied bx weg / (§. 301). Setzet nemlich

$$x = u + \frac{1}{2}b$$

so ist

$$-x^2 = u^2 - bu - \frac{1}{4}bb$$
$$+ ax = + bu + \frac{1}{2}bb$$

$$-x^2 + bx = -u^2 + \frac{1}{4}bb$$

folgends $y^2 = \frac{1}{4}bb - u^2$.

Solcher gestalt kan der Ort / wie vorhin construiret werden / nur daß ihr den halben Diameter $AC = \frac{1}{2}b$ annehmet. Denn so ist allzeit $AE = x$ / $ME = y$.

III. Auf gleiche Art wird die Æquation $yy - by = cx - xx$ auf den ersten Fall reduciret. Denn nehmet anfangs by weg / daß ihr setzet

$$y = v + \frac{1}{2}b$$

$$y^2 = v^2 + by + \frac{1}{4}bb$$

$$-by = -bv - \frac{1}{2}bb$$

$$y^2 - by = v^2 - \frac{1}{4}bb$$

Setzet ferner $x = t + \frac{1}{2}c$

$$-x^2 = -x^2 - ct - \frac{1}{4}cc$$
$$+cx = +ct + \frac{1}{2}cc$$

$$cx - x^2 = \frac{1}{4}cc - t^2$$

Solchergestalt bekommet ihr

$$v^2 - \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}cc - t^2$$

Setzet endlich $\sqrt{(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc)} = m$, so ist $v^2 = m^2 - t^2$, eine Gleichung, wie die in dem ersten Falle, und wird der Circul mit $\frac{1}{2}m$ beschrieben.

Die 129. Aufgabe.

353. **Einen Ort an einer Parabel zu construiren.**

Auflösung.

Die Fälle, so hier vorkommen können, sind folgende.

$y^2 = ax$, $y^2 = ax + bb$, $y^2 = bb - ax$.

In dem ersten Falle ist klahr, daß nur mit dem Parameter a eine Parabel (§. 207. 221. 222) beschrieben werden darf, so sind die Abscissen x, die Semiordinaten y (§. 204). Tab. II. Fig. 15.

In dem andern nehmet entweder AF oder Af $= bb : a$, so ist FP oder fP $= x$, PM $= y$. Denn AP $= x + bb : a$, und daher $y^2 = ax + bb$. Wiederumb wenn fP $= x$, so

so ist AP $= x - bb : a$ / folgends $y^2 = ax - bb$ (§. 204.).

Endlich in dem letzten Falle nehmet abermals AL $= bb : a$ / so ist LP $= x$ / PM $= y$. Denn AP $= bb : a - x$ und darumb $y^2 = bb - ax$.

Anmerckung.

354. Auf diese Fälle werden alle übrigen / die vor kommen / reduciret / wie in folgenden Aufgaben gewiesen wird.

Die 138. Aufgabe.

355. **Einen Ort an einer Parabel zu construiren / da $yy + ay = bx - \frac{1}{4}aa$.**

Auflösung.

Nehmet das andere Glied ay weg (§. 301.) Setzet nemlich

$$y = v - \tfrac{1}{2}a$$

so ist

$$\begin{aligned} y^2 &= v^2 - av + \tfrac{1}{4}aa \\ +ay &= v^2 + av - \tfrac{1}{2}aa \\ \hline v^2 - \tfrac{1}{4}aa &= bx - \tfrac{1}{4}aa \\ \hline v^2 &= bx \end{aligned}$$

Also ist der Ort auf den ersten Fall reduciret / und ihr dörfet nur mit dem Parameter b eine Parabel beschreiben / PR $= \frac{1}{2}a$ machen / so ist AP $= x$ / RM $= y$.

Die 131. Aufgabe.

356. **Einen Ort zu construiren / da $yy - ay = bx + cc$.**

Auf-

Auflösung.

Nehmet das andere Glied ay weg. Stellet nemlich

$$y = v + \frac{1}{2}a$$

$$\text{so ist } y^2 = v^2 + av + \frac{1}{4}aa$$
$$-ay = -av - \frac{1}{2}aa$$

$$v^2 - \frac{1}{4}a^2 = bx + cc$$

$$v^2 = bx + cc + \frac{1}{4}a^2$$

Setzet ferner $\sqrt{(cc + \frac{1}{4}aa)} = m$, so habet ihr

$$v^2 = bx + m^2$$

Solchergestalt ist die gegebene Æquation auf den andern Fall der Aufgabe (§. 129. 353) reduciret worden.

Die 132. Aufgabe.

357. Einen Ort zu construiren, da $y^2 - axy : b = cx - aaxx : 4bb$.

Auflösung.

Nehmet das andere Glied $axy : b$ weg. Setzet nemlich

$$y = v + ax : 2b$$

$$\text{so ist } y^2 = v^2 + axv : b + ax^2 : 4bb$$
$$-axy : b = -axv : b - ax^2 : 2bb$$

$$v^2 - ax^2 : 4b^2 = cx - a^2x^2 : 4b^2$$

$$v^2 = cx$$

 Also

Also ist gegenwärtiger Fall abermals auf den ersten der Parabolischen Oerter reduciret worden (§. 354).

Die 133. Aufgabe.

358. **Einen Ort an einer Ellipsi zu construiren.**

Auflösung.

I. Es sey $xx = aa - byy : c$. Weil $b : c = aa - xx : yy$, so nehmet $b : c$ für die Verhältnis an, so der Diameter in der Ellipsi zu seinem
Tab. II. Fig. 19. Parameter hat. Es sey demnach der halbe Diameter $Ac = a$, $Pc = x$, so ist der Parameter $2ac : b$ und $PM = y$. Denn $AP = a - x$ $PB = a + x$, demnach $PA . PB = aa - xx$, folgends

$$b : c = aa - xx : yy \text{ (§. 224).}$$

das ist $aa - xx = byy : c$.

II. Es sey $xx + dx = aa - byy : c$. Nehmet das andere Glied dx weg. Setzet nemlich

$$x = v - \tfrac{1}{2} d$$

$$x^2 = v^2 - dv + \tfrac{1}{4} dd$$
$$+ ax = + dv - \tfrac{1}{2} dd$$

$$v^2 - \tfrac{1}{4} dd = aa - byy : c$$

$$v^2 = \tfrac{1}{4} dd + aa - byy : c$$

Setzet ferner $\surd(\tfrac{1}{4} dd + aa) = r$, so ist

$v^2 = r^2 - byy : c$ wie im ersten Falle.

III. Es sey $yy - dxy : f = aa - bxx : c$
Nehmet wie vorhin das andere Glied $dxy : f$ weg. Setzet nemlich

$$y = v + dx : 2f$$

so ist $y^2 = v^2 + dxv : f + d^2x^2 : 4f^2$
$-dxy : f = -dxv : f - d^2x^2 : 2f^2$

$$v^2 - dx^2 : 4f^2 = aa - bxx : c$$

$$v^2 = aa - bx^2 : c + d^2x^2 : 4ff.$$

Das ist $v^2 = aa - (4bffx^2 + cd^2x^2) : 4ffc$
Setzet ferner $-4bff + cdd = m$, $4ffc = n$
so ist $v^2 = aa - mx^2 : n$, wie im ersten Falle.

IV. Es sey $yy + dxy : f = ax - bxx : c$. Nehmet abermal das andere Glied $dxy : f$ weg. Setzet nemlich

$$y = v - dx : 2f$$

so ist $y^2 = v^2 - dxv : f + d^2x^2 : 4f^2$
$+ dxy : f = + dxv : f - d^2x^2 : 2f^2$

$$v^2 - d^2x^2 : 4f^2 = ax - bxx : c$$

$$v^2 = ax + d^2x^2 : 4f^2 - bx^2 : c$$

Das ist, $v^2 = ax + (d^2cx^2 - 4bf^2x^2) : 4cf^2$
Setzet ferner $d^2c - 4bf^2 = m$, $4cf^2 = n$
so ist $v^2 = ax - mx^2 : n$

oder $nv^2 : m = nax : m - x^2$

$z^2 - nax : m = - nv^2 : m$

Endlich nehmet das andere Glied $nax : m$ weg. Setzet zu dem Ende

$x = z + na : 2m$

so ist $x^2 = z^2 + naz : m + n^2a^2 : 4m^2$

$-nax : m = -naz : m - n^2a^2 : 2m^2$

$z^2 - n^2a^2 : 4m^2 = - nv^2 : m$

$z^2 = n^2a^2 : 4m^2 - nv^2 : m$ / wie in dem ersten Falle.

Die 134. Aufgabe.

359. **Einen Ort an einer gleichseitigen Hyperbel zu construiren.**

Auflösung.

Tab. II. Fig. 23. I. Es sey $xx - aa = yy$. Da nun in einer gleichseitigen Hyperbel die Zwerch-Axe AB dem Parameter gleich ist / so nehmet dafür $2a$ an und theilet die Zwerch-Axe AB in zwey gleiche Theile in C. Ich sage / daß CP $= x$ und PM $= y$ sey. Denn weil CA $= a$ / so ist AP $= x - a$ / PB $= a + x$. Nun ist PB. AB $= (PM)^2$ (§. 244). Derowegen ist $xx - aa = yy$.

II. Es sey $xx + ax = yy$. Nehmet das andere Glied ax weg. Setzet nemlich

x

$$x = z - \tfrac{1}{2} a$$

so ist $x^2 = z^2 - az + \tfrac{1}{4} aa$

$+ ax = + az - \tfrac{1}{2} aa$

$z^2 - \tfrac{1}{4} aa = yy$, wie im ersten Falle.

III. Es sey $xx + ax = yy + by$. Nehmet das andere Glied ax weg. Setzet zu dem Ende

$$x = z - \tfrac{1}{2} a$$

so ist $x^2 = z^2 - az + \tfrac{1}{4} aa$

$+ ax = + az - \tfrac{1}{2} aa$

$z^2 - \tfrac{1}{4} aa = yy + by.$

Nehmet auf gleiche Weise by weg. Zu dem Ende setzet

$$y = v - \tfrac{1}{2} b$$

so ist $y^2 = v^2 - bv + \tfrac{1}{4} b^2$

$+ by = + bv - \tfrac{1}{2} b^2$

$z^2 - \tfrac{1}{4} aa = v^2 - \tfrac{1}{4} b^2$

$z^2 + \tfrac{1}{4} bb - \tfrac{1}{4} aa = v^2$

Setzet endlich $\sqrt{(\tfrac{1}{4} aa - \tfrac{1}{4} bb)} = c$, so ist

$z^2 - cc = v^2$, wie in dem ersten Falle.

IV. Es sey $xx + xy = ab - cy$. Schaffet das andere Glied xy ab. Setzet zu dem Ende

$$x = v - \frac{1}{2}y$$

so ist $x^2 = v^2 - vy + \frac{1}{4}yy$
$+ xy = + vy - \frac{1}{4}yy$

$$v^2 - \frac{1}{4}yy = ab - cy$$

das ist $v^2 - ab = -\frac{1}{4}yy - cy$.

Schaffet ferner das andere Glied cy ab/ in dem ihr setzet

$$\frac{1}{2}y = z + c$$

$\frac{1}{4}yy = z^2 + 2cz + cc$
$- cy = - 2cz - 2cc$

$$v^2 - ab = z^2 - cc$$

$$v^2 - ab + cc = z^2$$

Endlich setzet $\sqrt{(ab - cc)} = m$/ so ist
$v^2 - m^2 = z^2$ wie im ersten Falle.

Die 139. Aufgabe.

360. **Einen Ort an einer ungleichseitigen Hyperbel zu construiren.**

Auflösung.

Tab. II. Fig. 23.

I. Es sey $xx - aa = byy : c$. Machet wie in der vorhergehenden Aufgabe die Zwerch-Axe AB = $2a$ den Parameter = $2ac : b$/ so ist abermal CP = x/ PM = y.

Denn

Denn weil CA $= a$ / so ist CP $= x$ / PA $= x-a$ / PB $= a+x$ / folgends da $2a : (2ac:b) =$ AP. PB : $(PM)^2 = xx-aa : yy$ (§. 244): so ist $2ayy = (2acxx-2a^3c):b$ / das ist / $by:c = xx-aa$.

II. Es sey $xx-ax = byy:c$. Nehmet das andere Glied ax weg. Zu dem Ende setzet

$$x = v-\tfrac{1}{2}a$$

so ist $x^2 = v^2 + av + \tfrac{1}{4}aa$
$-ax = -av - \tfrac{1}{2}aa$

$v^2 - \tfrac{1}{4}aa = byy:c$ / wie im ersten Falle.

Die 360. Aufgabe.

360. **Einen Ort an einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten zu construiren.** Tab. II. Fig. 26.

Auflösung.

I. Es sey $xy = ab$. Setzet BC und AB rechtwincklicht zusammen / und macht BH $= a$ / HK $= b$. Beschreibet zwischen den Asymptoten CBA durch C eine Hyperbel / so ist BP $= x$ / PM $= y$ (§. 264).

II. Es sey $ab = cxy:d + my$

so ist $abd = cxy + dmy$

$abd:c = xy + dmy:c$

Setzet $x + dm : c = v$,
so ist $abd : c = zy$, wie im ersten Falle.

III. Es sey $ax = xy - by$. Setzet $x - b = v$, so ist $xy - by = vy$ und $av + ab = ax$, folgends $vy = av + ab$, oder $vy - av = ab$.

Setzet ferner $y - a = z$, so ist $zv = ab$, wie im ersten Falle.

IV. Es sey $ab - xx = xy + cy$. Setzet $x + c = v$, so ist $ab - v^2 + 2cv - cc = vy$, das ist, $ab - cc = vy + v^2 - 2cv$. Setzet ferner $y + v - 2c = t$, so ist $ab - cc = tv$. Endlich setzet $\sqrt{(ab-cc)} = m$, so ist $m^2 = tv$ wie im ersten Falle.

Anmerckung.

362. Ihr sehet aus den gegebenen Exempeln, daß die erste Æquationen sich aus der Natur der krummen Linie herleiten lassen, die andern aber auf dergleichen reduciret werden. Ich könte zwar nach dem Exempel des Craigii in seinem Tractatu de Qvadraturis Curvarum & Locis Geometricis und des Marquis de l'Hospital in seinem Traité des Sections Coniques lib. 7. p. 20. & seqq. allgemeine Æquationen geben, nach welchen alle Geometrische Oerter, die sich durch den Circul und die Kegelschnitte construiren lassen, construiret werden können: allein ich wil die Anfänger damit nicht aufhalten, sondern vielmehr zeigen, wie die Cubischen und Quadrato-quadratischen Æquationen durch Verknüpfung zwey Geometrischer Oerter, in welche man sie reduciret, construiret werden.

Die 141. Aufgabe.

363. **Eine Cubische Æquation, darinnen**

nen das andere Glied fehlet/ in Geometrische Oerter zu bringen.

Auflösung.

I. Es sey $x^3 + abx = aac$. Setzet $xx = ay$/ welches ein Ort an einer Parabel ist (§. 353); so ist $ayx + abx = aac$/ oder $yx + bx = ac$/ ein Ort an einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten (§. 208.) Ferner weil

$$x^3 + abx = aac$$

$$\overline{}\; x$$

so ist $x^4 + abx = aacx$

$$\overline{}$$

$$a^2y^2 + a^2by = a^2cx$$

$$\overline{}\; a^2$$

$y^2 + by = cx$/ ein Ort an einer Parabel.

Ziehet ihn von

$ay = xx$ ab/ so bleibet

übrig $ay - by - y^2 = x^2 - cx$/ ein Ort an einem Circul.

II. Es sey $x^3 - abx = aac$. Setzet wie vorhin $xx = ay$/ welches ein Ort an einer Parabel ist (§. 353); so ist (wenn ihr den Werth von xx in seine Stelle setzet) $ayx - abx = aac$/ oder $yx - bx = ac$/ ein Ort an einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten. Ferner weil

$$x^3 - abx = aac$$

$$\overline{}\; x$$

so

so ist $x^4 - abx^2 = aacx$

das ist $a^2y^2 - a^2by = a^2cx$ / a^2

$y^2 - by = cx$ ein Ort an einer Parabel.

Ziehet ihn von

$ay = xx$ ab/ so bleibet übrig

$ay + by - y^2 = x^2 - cx$ / ein Ort an einem Circul.

III. Es sey $x^3 - abx = - aac$. Setzet abermal $xx = ay$ / welches ein Ort an einer Parabel ist. Wenn ihr nun den Werth von xx in der gegebenen Æquation substituiret / so ist $ayx - abx = - aac$ oder $yx - bx = - ac$ / ein Ort an einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten. Ferner weil

$x^3 - abx = - aac$ / x

so ist $x^4 - abx^2 = - aacx$

das ist $a^2y^2 - a^2by = - aacx$ / a^2

$y^2 - by = - cx$ / ein Ort an einer Parabel.

Ziehet ihn von $ay = xx$ ab / so bleibet übrig $ay + by - y^2 = x^2 + cx$ ein Ort an einem Circul.

Die 1. Anmerckung

364. Ihr könnet noch mehrere Oerter heraus bringen/ wenn ihr es verlanget. Denn setzet zu dem Orte

te an der Parabel im ersten Falle $y^2 + by = cx$ den andern Ort an der Parabel $ay = x^2$/ so bekommet ihr $y^2 + ay + by = x^2 + cx$/ einen Ort an einer gleichseitigen Hyperbel. Setzet ferner in der Æquation $x^4 + abx^2 = aacx$ an die Stelle von x^4 seinen Werth $a\,y^2$/ so bekommet ihr

$$a^2y^2 + abx^2 = a^2cx$$
$$\overline{}\; a^2$$
$$y^2 + bx^2 : a = cx$$
$$\overline{}$$
$$y^2 = cx - bx^2 : a$$

einen Ort an einer Elipsi. Eben dergleichen Oerter könnet ihr auf solche Weise in dem andern und dritten Falle finden.

Die 2. Anmerckung.

365. Wenn ihr euch die Æquationen für die Geometrischen Oerter bekandt machet/ so werdet ihr gar leicht sehen/ wie ihr die Sache angreiffen müsset/ damit die vorgegebene Æquation in Geometrische Oerter reduciret werde.

Die 142. Aufgabe.

366. **Eine Cubische Æquation zu construiren/ darinnen das andere Glied fehlet.**

Auflösung.

I. Es sey $x^3 - abx = aac$.

1. Resolviret die gegebene Æquation in Geometrische Oerter (§. 364) und erwehlet euch daraus zwey/ durch deren Hülfe ihr ihre Wurtzeln am beqvemesten finden könnet/ als den Ort an der

Parabel $xx = ay$ und den Ort an dem Circul $-ay + by - yy = xx - cx$.

2. Beschreibet mit dem Parameter a eine Parabel/ so ist der erste Ort construiret.

3. Damit ihr nun auch an den Circul $ay + by - yy = xx - cx$ construiren könnet/ so nehmet beyderseits das andere Glied weg. Setzet nemlich

$$x = v + \tfrac{1}{2}c$$

so ist
$$x^2 = v^2 + cv + \tfrac{1}{4}cc$$
$$-cx = -cv - \tfrac{1}{2}cc$$

$$x^2 - cx = v^2 - \tfrac{1}{4}cc$$

Setzet ferner $y = z + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b$

so ist
$$ay + by = +az + bz + \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2$$
$$-y^2 = -z^2 - az - bz - \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2$$

$$ay + by - y^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 - z^2$$

Folgends $v^2 - \tfrac{1}{4}cc = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}c^2 - z^2$

$$v^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2 - z^2$$

Demnach ist der halbe Diameter des Circuls (§. 352) $= \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2)}$.

4. Machet demnach in der Axe der Parabel AC $= \tfrac{1}{2}a$ und DC $= \tfrac{1}{2}b$/ DH $= \tfrac{1}{2}c$/ so ist HA $= \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}cc)}$.

5. De-

5. Derowegen wenn ihr durch den Scheitelpunct der Parabel A aus dem Puncte H einen Circul beschreibet / und aus den Puncten M und N / wo er die Parabel durchschneidet / die halben Ordinaten PM und PN ziehet; so ist PM die wahre Wurtzel; hingegen PN sind die falschen. Tab. IV. Fig. 32.

Beweiß.

Denn es sey PM $= x$ / AC $= \frac{1}{2}a$ / DG $= \frac{1}{2}b$ / DH $= \frac{1}{2}c$ / so ist $(AE)^2 = (aa + bb + cc):4$ und aus der Natur der Parabel AP $= xx:a^2$ folgends DP $=$ HE $= xx:a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, und ME $= x - \frac{1}{2}c$. Also ist $(FE)^2 = x^4:a^2 - x^2 - bx^2:a + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{2}ab + xx - cx + \frac{1}{4}cc$ und demnach

$$x^4:a^2 - bx^2 - cx + (aa + bb + 2ab + cc):4 = (aa + bb + cc + 2ab):4,$$

das ist, $x^4:a^2 - bx^2:a = cx$

$$\overline{}\; a^2$$

$$x^4 - abx^2 = a^2cx$$

$$\overline{}\; x$$

$$x^3 - abx = aac$$

welches eben die vorgegebene Æquation ist / die auf gleiche Weise heraus kommet / wenn ihr PN $= -x$ annehmet. Damit ihr aber den halben Diameter HN leichte finden könnet / dörfet ihr nur PN bis in O verlängern; so ist ON $=$ PN $+$ DH $= \frac{1}{2}c - x$ und HO $=$ DP. Derowegen ist PM die waare Wurtzel / und PN sind die beyden falschen Wurtzeln.

II. Es sey $x^3 - abx = -aac$.

1. Resolviret abermal die gegebene Æquation in Geometrische Oerter (§. 364) uñ erwehlet zur Construction den Ort an der Parabel $xx = ay$ und den Ort an dem Circul $ay + by - y^2 = x^2 + cx$.
2. Beschreibet wie vorhin mit dem Parameter a eine Parabel/ und weil
3. der halbe Diameter des Circuls wie vorhin $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}ab)}$ gefunden wird; so machet wie dort AC $= \frac{1}{2}a$/ DC $= \frac{1}{2}b$/ DH $= \frac{1}{2}c$/ und beschreibet mit AH aus H den Circul. So ist PM die falsche/ und PN sind die wahren Wurtzeln.

Beweiß.

Der Beweiß ist völlig wie in dem ersten Falle.

III. Es sey $x^3 + abx = aac$.

Tab. IV. Fig. 35.

1. Resolviret die Æquation in Geometritrische Oerter (§. 364) und erwehlet zur Construction den Ort an der Parabel $xx = ay$ und den Ort an dem Circul $xx - cx = ay - by - yy$.
2. Beschreibet auch hier für den ersten Ort mit dem Parameter a eine Parabel und weil ihr auf die Art wie im ersten Falle
3. Den halben Diameter des Circuls $\sqrt{(aa + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}ab)}$ findet/ so machet AC $= \frac{1}{2}a$/ CD $= \frac{1}{2}b$/ DH $= \frac{1}{2}c$ und be-

beschreibet aus H mit AH durch den Scheitelpunct A den Circul / so ist PM die verlangte Wurtzel x. Tab. IV. Fig. 35.

Beweiß.

Weil $DH = \frac{1}{2}c$, $DC = \frac{1}{2}b$, $AC = \frac{1}{2}a$, so ist $DA = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, $(AH)^2 = \frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab$. Und weil $PM = x$, so ist aus der Natur der Parabel $AP = x^2 : a$, folgends $DP = HR = x^2 : a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, $(HR)^2 = x^4 : a^2 + bx^2 : a + \frac{1}{4}bb - x^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa$. Endlich da $PR = DH = \frac{1}{2}c$, so ist $MR = x - \frac{1}{2}c$ und $(MR)^2 = x^2 - cx + \frac{1}{4}cc$. Derowegen ist $(MH)^2 = x^4 : a^2 + bx^2 : a + \frac{1}{4}bb - x^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + x^2 - cx + \frac{1}{4}cc = (AH)^2 = \frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab$, und solcher gestalt

$$x^4 : a^2 + bx^2 : a = cx$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; a$$
$$x^4 + abx^2 = a^2cx$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; x$$
$$x^3 + abx = a^2c.$$

Da nun dieses die vorgegebene Æquation ist; so siehet man / daß x die Wurtzel derselben sey. W. Z. E.

Die 1. Anmerckung.

367. Setzet $a = 1$, $b = q$, $c = r$, so sind die drey Cubischen Æquationen

$$x^3 * - qx - r = 0$$
$$x^3 * - qx + r = 0$$
$$x^3 * + qx - r = 0$$

und in den beyden ersten Fällen ist $AD = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}q$, das ist / die Summe aus dem halben Parameter der

Parabel und der halben bekandten Größe des dritten Gliedes; in dem dritten aber $\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}a$/ das ist / die Summe aus dem halben Parameter der Parabel und der halben bekandten Grösse des dritten Gliedes; in dem dritten aber $\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}a$ das ist / die Differentz zwischen dem halben Parameter und der halben bekandten Grösse des dritten Gliedes / und in allen drey Fällen $DH = \frac{1}{2}r$/ das ist/ das halbe dritte Glied: welches die Regel ist/ die *Cartesius* für die Construction der Cubischen Æquationen gegeben.

Die 2. Anmerckung.

368. Wenn der Circul die Parabel nicht durchschneidet/ so hat die Æquation keine würckliche Wurtzeln. Eben dieses gielt von einigen Wurtzeln / wenn die Parabel nicht in drey Puncten durchschnitten wird.

Die 3. Anmerckung.

369. Wenn alle Glieder in der Æquation zugegen sind/ könnet ihr (§. 301) das andere wegschaffen: wiewol ihr sie auch construiren könnet/ wenn das andere behalten wird. Denn es sey z. E. $x^3 + ax^2 + abx = aac$. Wenn ihr diese Æquation mit $x - a$ multipliciret/ und in der/ so heraus kommet/ $x^4 + abx^2 - aax^2 - abx = aacx - aac$ den Werth von x^2 aus dem angenommenem Orte an der Parabel $x^2 = ay$ stellet/ so entstehet ein anderer Ort an einer Parabel $yy + by - ay = bx + cx - ac$. Wenn ihr ferner diesen von dem ersten abziehet/ bleibet ein Ort an einem Circul $xx - bx - cx + ac = 2ay - by - yy$ übrig/ dessen halber Diameter $\sqrt{(a^2 - ab + \frac{1}{2}bb - ac + \frac{1}{2}}$
Tab. IV. $bc + \frac{1}{4}cc)$ gefunden wird (§. 352.). Mit dem
Fig. 36. ersten Orte an der Parabel und dem Orte an

dem Circul könnet ihr die Æquation construiren. Beschreibet nemlich mit dem Parameter a eine Parabel und macht $Ac = a$ / $CD = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ / $DH = \frac{1}{2}b$ / so ist aus der Natur der Parabel $CR = \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = a$ / daher $DR = a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$ / $(DR)^2 = a^2 - ab + \frac{1}{4}bb - ac + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc$ / $(DH)^2 = \frac{1}{4}bb$ / folgends $HR = \sqrt{(a^2 - ab + \frac{1}{2}bb - ac + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc)}$. Solchergestalt muß aus H mit HR durch den Punct R der Circul beschrieben werden. Den Beweis könnet ihr wie vorhin finden. Denn wenn ihr $PM = x$ annehmet / werdet ihr die verlangte Æquation heraus bringen.

Die 143. Aufgabe.

370. **Eine Quadrato-quadratische Æquation / darinnen das andere Glied fehlet / in Geometrische Oerter zu bringen.**

Auflösung.

I. Es sey $x^4 + abx^2 + a^2cx = a^3d$. Setzet $xx = ay$ / welches ein Ort an einer Parabel ist (§. 353); so ist

$$\frac{a^2y^2 + a^2by + a^2cx = a^3d}{y^2 + by + cx = ad} \quad a^2$$

$$y^2 + by = ad - cx \text{ / ein Ort an einer Parabel.}$$

$$ay = xx$$

$ay - by - y^2 = x^2 + cx - ad$, welches ein Ort an einem Circul ist.

II. Es sey $x^4 - abx^2 - a^2cx = a^3d$. Setzet $x^2 = ay$, welches ein Ort an einer Parabel ist; so habet ihr

$$a^2y^2 - a^2by - a^2cx = a^3d$$

$$\overline{} : a^2$$

$$y^2 - by - cx = ad$$

$y^2 - by = cx + ad$, einen Ort an einer Parabel.

$$ay = x^2$$

$ay - by - y^2 = x^2 - cx - ad$, einen Ort an einem Circul.

III. Eben so könnet ihr in allen übrigen Fällen verfahren, die ihr durch Veränderung der Zeichen in dem dritten, vierdten, und fünften Gliede leicht findet.

Die 144. Aufgabe.

371. **Eine Qvadrato-Qvadratische Gleichung zu construiren, darinnen das andere Glied fehlet.**

Auflösung.

I. Es sey $x^4 + abx^2 + a^2cx = a^3d$.

1. Resolviret die gegebene Æquation in Geometrische Oerter (§. 370) und erwehlet davon zwey zur Construction, als den Ort an der Parabel $ay = xx$ und den Ort an dem Circul $ay - by - y^2 = x^2 + cx - ad$.

2. Construiret die Parabel aus dem Parameter a.

3. Umb nun den Ort an dem Circul zu construiren/ suchet erst seinen Radium, in dem ihr beyderseits das andere Glied wegnehmet (§. 352): welchen ihr $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc + ad)}$ finden werdet.

4. Setzet nun AD $= \frac{1}{2}a$/ $- \frac{1}{2}b$/ DH $= \frac{1}{2}c$/ so ist AH $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc)}$. Setzet ferner AK $= a$/ AI $= d$/ so ist AL $= \sqrt{ad}$ (§. 195. Geom.) folgends HM $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc + ad.)}$ Tab. IV. Fig. 37.

5. Beschreibet demnach durch L mit dem halben Diameter HL einen Circul; so ist PN die falsche/ PM die wahre Wurtzel.

Beweiß.

Es sey PM $= x$/ und die übrigen Linien wie vorhin/ so ist RM $= x + \frac{1}{2}c$/ AP $= x^2 : a$ (§. 209). und PD $=$ HR $= x^2 : a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$/ folgends $(HR)^2 = x^4 : a^2 + \frac{1}{4}bb + bx^2 : a - x^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa$/ $(RM)^2 = xx + cx + \frac{1}{4}cc$/ und daher $(HM)^2 = x^4 : a^2 + bx^2 : a + \frac{1}{4}bb - x^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + x^2 + cx + \frac{1}{4}cc$. Da nun $(HL)^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc + ad$; so habet ihr $x^2 : a^2 + bx^2 : a + \frac{1}{4}bb - x^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + x^2 + cx + \frac{1}{4}cc = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + cc + ad$/ das ist/

$x^4 : a^2 + bx^2 : a + cx = ad$

$\overline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad} a^2$

oder $x^4 + abx^2 + a^2cx = a^3d$, die vorgegebene Æquation. Demnach ist $PM = x$. W. Z. E.

II. Es sey $x^4 - abx^2 - a^2cx = a^3d$.

1. Resolviret die gegebene Æquation in Geometrische Oerter (§. 370) und erwehlet zur Construction den Ort an der Parabel $xx = ay$ und den Ort an dem Circul $ay - by - y^2 = x^2 - cx - ad$.
2. Machet im übrigen alles, wie vorhin, so ist PN die wahre Wurtzel, und PM die falsche.

Beweiß.

Der Beweis ist eben wie vorhin. Denn setzet $PN = x$, so ist $NR = x - \frac{1}{2}c$, $DP = HR = xx : a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b$, folgends $x^4 : a - xx + \frac{1}{4}aa - bx^2 : a - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb + xx - cx + \frac{1}{4}cc = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc + ad$, das ist,

$x^4 : a^2 - bx^2 : a - cx = ad$

$\overline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad} a^2$

oder $x^4 - abx^2 - a^2cx = a^3d$, welches die vorgegebene Æquation ist. Demnach ist $PM = x$ oder die wahre Wurtzel. W. Z. E.

III. Eben auf solche Art verfahret ihr in allen übrigen Fällen.

Die 1. Anmerckung.

372. Diese Methode gehet nicht allein ferner an, wenn alle Glieder in einer Qvadrato-Qvadratischen Æquation vorhanden; sondern auch in höheren Æqua-

quationen/ nur daß in dem letzten Falle die Geometrischen Oerter/ so zur Construction genommen werden / krumme Linien von höheren Geschlechten sind.

Die 2. Anmerckung.

373. Wenn ihr alle Cubische und Ovadrato-quadratische Æquationen auf die vorgeschriebene Weise construiret; so werdet ihr wahrnehmen / daß man gar leicht eine allgemeine Regel finden kan / alle Æquationen von dem dritten und vierdten Grade zu construiren. Dergleichen Regel hat *Thomas Baker*, ein Engelländer/ in seinem Clave Geometrica Catholica gegeben/ wiewol er sie auf andere Weise gefunden. Allein es ist viel rathsamer/ wenn man sich an die Methode hält / die ich bißher erklähret habe. Weil man in besonderen Fällen öfters geschicktere Constructionen dadurch finden kan/ als wenn man alles auf einerley Art verrichten will. Die Regel/ welche *Baker* giebt/ das centrum H zu finden ist folgende:

$$AD = \tfrac{1}{2}a + p^2 : 8a \pm q : 2a$$

$$DH = \tfrac{1}{4}p + p^3 : 16a^2 \pm pq : 4a^2 \pm r : 2a$$

Bey dem Gebrauch ist folgendes zu mercken:

1. Es bedeutet a den Parameter der Parabel / und könnet ihr in einem besonderen Falle die Linie aus der Æquation dafür annehmen/ welche am öftersten vorkommet/ und sie zugleich 1 gelten lassen/ so wird die Construction umb so viel leichter/ indem a überall verschwindet/ weil 1 weder multipliciret/ noch dividiret. Ferner ist p die bekandte Grösse des andern Gliedes/ q des dritten und r des vierdten.

2. Wenn ein Buchstabe in der Æquation fehlet / so bleibet er auch in der Regel weg.

3. Wenn p und r verschiedene Zeichen haben/ so ist in der Regel $-r$/ sonst aber $+r$.

4. Wenn in der Æquation $+q$ stehet; so ist in der Regel $-q$; habet ihr in jener $-q$; so ist in dieser $+q$.

5. Wenn p fehlet und in der Æquation $-r$ ist; so fallen die wahren Wurtzeln zur Lincken: habt ihr aber $+r$, zur Rechten. Eben so, wenn ihr $-p$ habet; so fallen die wahren Wurtzeln zur Lincken; ist aber $+p$, so fallen sie zur Rechten.

6. Wenn in einer Biqvadratischen Æquation $-s$ vorhanden (es bedeutet aber s das letzte Glied), so fin-
Tab. IV. Fig. 18. det ihr den Punct, durch welchen der Circul beschrieben wird, wie in der gegenwärtigen Aufgabe gezeiget worden (§. 371): hingegen wenn ihr $+s$ habet, müsset ihr ferner über AH einen halben Circul beschreiben, und darein AZ = AL tragen, so ist Z der Punct, wodurch der Circul beschrieben wird.

7. Wenn p vorhanden, macht ihr AQ $= \frac{1}{4}p$.

Die 3. Anmerckung.

Tab. IV. Fig. 39. 374. Wenn ihr den Beweis von dieser Regel verlanget, kan es am füglichsten folgender gestalt geschehen. Setzet AD $= b$, DH $= d$, AQ $= c$, so ist $(AH)^2 = dd + bb$. Es sey ferner PM $= x$ der Parameter $= a$, so ist OM $= x + c$, RM $= x + d$ und weil $a : OM + AQ = PM : AP$ (§. 217), AP $= (xx + 2cx) : a$, folgends DP $=$ HR $= (xx + 2cx) : a - b$, $(HR)^2 = x^4 : a^2 + 4cx^3 : a^2 + 4c^2x^2 : a^2 - 2bxx : a - 4bcx : a$, $(RM)^2 = x^2 + 2dx + dd$. Solchergestalt habet ihr

$$x^4 : a^2 + 4cx^3 : a^2 + 4c^2x^2 : a^2 - 2bx^2 : a - 4bcx : a + x^2 + 2dx + dd = bb + dd$$

$$\begin{array}{l} x^4 : a^2 + 4cx^3 : a^2 + 4c^2x^2 : a^2 - 4bcx : a = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad - 2bx^2 : a \quad + 2dx \\ \qquad\qquad\qquad\quad + x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} x^3 + 4cx^2 + 4c^2x & -4abc & = 0. \\ \quad\quad -2abx & +2a^2d & \\ \quad\quad +a^2x & & \end{array}$$

Hieraus sehet ihr/ daß/ wenn die wahre Wurtzel zur Rechten fallen sol/ das andere Glied das Zeichen + haben muß und/ wenn c fehlet/ der Punct A in a fället. Damit ihr nun auch die Werthe von c/ b und d findet/ die in der Central-Regel angegeben worden; so setzet

$$x^3 + px^2 \pm qx \pm r = 0.$$

Dann ist

$$4c = p \qquad 4c^2 - 2ab + a^2 = q$$

$$c = \tfrac{1}{4}p \qquad 4c^2 + a^2 - q = 2ab$$

$$\tfrac{1}{4}p^2 + a^2 - q = 2ab$$

$$:2a$$

$$\tfrac{1}{2}a + p^2:8a - q:2a = b$$

$$a^2 + 4c^2 - 2ab = -q$$

$$a^2 + \tfrac{1}{4}p^2 \pm q = 2ab$$

$$:2a$$

$$\tfrac{1}{2}a + p^2:8a + q:2a = b$$

$$2a^2d - 4abc = r$$

$$2a^2d = 4abc + r$$

$$d = 2bc:a + r:2a^2$$

Das ist/ $d = \tfrac{1}{4}p + p^3:16a^2 + pq:4a^2 + r:2a^2$

$$2a^2d - 4abc = -r$$

$$2a^2d = 4abc - r$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; 2a^2$$

$d = 2bc : a - r : 2a^2$, das ist,

$$d = \tfrac{1}{4}p + p^3 : 16a^2 + pq : 4a^2 - r : 2a^2$$

Also kommet so wol AD als DH in allen Fällen, da $+p$ ist, wie sie in der Regel angegeben worden.

Lasset nun auch PN $= x$ seyn und das übrige alles, wie vorhin: so ist NR $= x - d$, NO $= x - c$, PM $= x - 2c$ und, weil a : PN = PM : AP (§. 217), AP $= (xx - 2cx) : a$, folgends DP = HR $= (xx - 2cx) : a - b$. Solcher gestalt ist $x^4 : a^2 - 4cx^3 : a^2 + 4c^2x^2 : a^2 - 2bxx : a + 4bcx : a + bb + x^2 - 2dx + dd = bb + dd$, das ist,

$$\begin{array}{l} x^4 : a^2 - 4cx^3 : a^2 + 4c^2x^2 : a^2 + 4bcx : a = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad - 2bx^2 : a \;\; - 2dx \\ \qquad\qquad\qquad\quad + x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^3 - 4cx^2 + 4c^2x + 4abc = 0 \\ \qquad\qquad - 2abx \;\; - 2a^2d \\ \qquad\qquad + a^2x \end{array}$$

Hieraus sehet ihr, daß, wenn die wahre Wurtzel zur Lincken fället, das andere Glied das Zeichen - haben muß. Damit ihr nun auch die Werthe von c, b und d findet, so setzet

$$x^3 - px^2 \pm qx \pm r = 0.$$

Dann ist

-p

$-p = -4c$ (÷ 4)

$\frac{1}{4}p = c$

$4c^2 - 2ab + a^2 = q$

$a^2 + 4c^2 - q = 2ab$ (÷ 2a)

$\frac{1}{2}a + 2c^2 : a - q : 2a = b$

Das ist/ $\frac{1}{2}a + p^2 : 8a - q : 2a = b$

$4c^2 - 2ab + a^2 = q$

$4c^2 + a^2 + q = 2ab$ (÷ 2a)

$\frac{1}{2}a + 2c^2 : a + q : 2a = b$

Das ist/ $\frac{1}{2}a + p^2 : 8a + q : 2a = b$

$4abc - 2a^2d = r$

$4abc - r = 2a^2d$

$2bc : a - r : 2a^2 = d$

$\frac{1}{4}p + p^3 : 16a^2 + pq : 4a - r : 2a^2 = d$

$4abc - 2a^2d = -r$

$4abc + r = 2a^2d$ (÷ 2a²)

$2bc : a + r : 2a^2 = d$

$\frac{1}{4}p + p^3 : 16a^2 + pq : 4a + r : 2a^2 = d$

Also kommet abermal in allen Fällen/ Da $-p$

ist/

ist/ so wol AD als DH / wie es die Regel erfordert.

Auf gleiche Art könnet ihr die Regel von den Qvadrato-Qvadratischen Gleichungen erweisen.

Die 4. Anmerckung.

375. Es wil aber nöthig seyn / daß ich die Construction der Cubischen und Biqvadratischen Æquationen durch Exempel erläutere.

Die 145. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 40. 376. Zwischen zwey gegebenen Linien AB und DC zwey mittlere Proportional-Linien zu finden.

Auflösung.

Es sey AB $= a$ DC $= b$/ die gesuchten Linien x und y/ so ist

$$\div\; a.\; x.\; y \qquad\qquad a : x = y : b$$

$$ay = x^2 \;(\S.126) \qquad\qquad ab = xy$$

$$y = x^2 : a \qquad\qquad ab : x = y$$

$$x^2 : a = ab : x$$

$$x^3 = a^2 b$$

Wenn ihr diese Æquation in Geometrische Oerter reduciret (§.363); so findet ihr unter andern den Ort an der Parabel $ay = x^2$ und den Ort an dem Circul $y^2 - ay = bx - xx$/ dessen halber Diameter (§.352) $= \sqrt{(\frac{1}{4} aa + \frac{1}{4} bb)}$. Beschreibet demnach mit dem Pa-

Parameter a die Parabel / und nehmet in derselben $AD = \frac{1}{2}a$ / $DH = \frac{1}{2}b$ an; so könnet ihr den Circul durch A beschreiben / und ist $PM = x$ / $AP = y$ / weil $a : PM = PM : AP$ (§. 209). Tab. IV. Fig. 34.

Die 146. Aufgabe.

377. **Eine gerade Linie AB / die nach belieben in C getheilet worden / noch ferner in D dergestalt zu theilen / daß $CD : DB = (AC)^2 : (CD)^2$.** Tab IV. Fig. 41.

Auflösung.

Es sey $AC = a$ / $CB = b$ / $CD = x$ / so ist $DB = b - x$ / folgends

$$x : b - x = a^2 : x^2$$

$$x^3 = a^2b - a^2x \quad (§. 126)$$

$$x^3 - a^2x = a^2b$$

Wenn ihr diese Æquation in Geometrische Oerter (§. 363) reduciret / so bekommet ihr unter andern den Ort an der Parabel $ay = x^2$ und den Ort an dem Circul $y^2 = bx + x^2$ dessen halber Diameter $= \sqrt{\frac{1}{4}bb} = \frac{1}{2}b$ ist (§. 352). Derowegen wird in gegenwärtigem Falle $DA = 0$ / und ihr dörfet nur an dem Scheitel-Puncte der Parabel A den halben Diameter des Circuls perpendicular aufrichten. Tab. IV. Fig. 34.

Die

Die 147. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 44. 378. In einem rechtwincklichten Triangel BAC/ darinnen AC = BD/ wird gegeben die grössere Seite AB / die Linien AC und BD zufinden.

Auflösung.

Es sey AB = a/ AC = BD = x/ so ist $(AD)^2 = aa - xx$. Nun ist AB : BD = AC : AD (§. 177 Geom.) und demnach AD = $x : a$/ folgends

$$x^4 : a^2 = aa - xx$$

$$x^4 = a^4 - a^2x^2$$

$$x^4 + a^2x^2 = a^4$$

Resolviret diese Æquation in Geometrische Oerter (§. 370); so findet ihr unter andern den Ort an der Parabel $ay = xx$ und den Ort an dem Circul $y^2 = a^2 - x^2$ / dessen halber Diameter a ist (§. 352). Derowegen geschiehet die Construction völlig/ wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Die 129. Aufgabe.

379. In einem rechtwincklichten Tri-
Tab. V. Fig. 45. angel ABC wird gegeben das Stücke der Hypotenuse BD und das Stücke der Grund-Linie BC über dieses die Perpendicular-Linie BA ; und sollen die bey-

beyden Seiten BC und AC gefunden werden.

Auflösung.

$AB = a$; $BD = b$/ $BC = c$/ $EC = x$/ $AE = y$/ so ist $BC = x + b$

$CD : DE = CB : BA$ $(EC)^2 = (DC)^2 + (DE)^2$

$x : y = b + x : x$ $cc + yy = xx$.

$ax = by + xy$ $xx - cc = yy$

$ax : (b + x) = y$

$a^2x^2 : (bb + 2bx + xx) = xx - cc$

$a^2x^2 = b^2x^2 - b^2c^2 + 2bx^3 - 2bc^2x + x^4 - c^2x^2$

$$x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2bc^2x = b^2c^2$$
$$- a^2x^2$$
$$- c^2x^2$$

Nehmet das andere Glied $2bx^3$ (§. 301) weg/ so könnet ihr die vorgegebene Æquation (§. 370) in Geometrische Oerter reduciren und durch Hülfe eines Ortes an der Parabel und eines Ortes an dem Circul (§. 144) construiren. Wollet ihr aber die Central-Regel des Bakers brauchen/ so nehmet a für den Parameter an/ damit die Parabel beschrieben wird/ und weil $p = 2b$/ $q = bb - aa - cc$/ $r = 2bcc$/ $s = bbcc$/ so ist $AD = \frac{1}{2}a + p^2 : 8 - \frac{1}{2}q$ (§. 373) $= \frac{1}{2}a + 4bb :$

8 -

$8 - \frac{1}{2}bb + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}cc =$ (weil $a = 1$) $a + \frac{1}{2}cc$, hingegen $DH = \frac{1}{4}p + p^3 : 16 - pq : 4 - \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}b + 8b^3 : 16 + 2b^3 : 4 + 2a^2b : 4 + 2bc^2 : 4 =$ (weil $a = 1$, und also $2a^2b : 4 = \frac{1}{2}b$) $b + \frac{1}{2}bcc$. Es ist aber cc die dritte Proportional-Linie zu a und c, weil $a = 1$.

Anmerckung.

380. Ihr hättet auf eben eine solche Art in den vorhergehenden Aufgaben durch die Bakerische Central-Regel die Werthe von AD und DH finden können. Denn z. E. es sey (§. 378) $x^4 + a^2x^2 - a^4 = 0$; so ist $p = 0$, $r = a^2$. Nehmet a für den Parameter und für 1 an; so ist $a^2 = a$, folgends $AD = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a = 0$, und $DH = \frac{1}{8}a$.

Ende des ersten Theiles.

Der andere Theil
Von den
Anfangs-Gründen
Der
Differential-Rechnung.

Die 1. Erklährung.

381. Die Differential-Rechnung ist eine Wissenschafft aus einer gegebenen endlichen Grösse eine unendlich kleine zufinden/ deren unendliche zusammen genommen ihr gleich werden.

Anmerckung.

382. Der Herr Geheime Rath von Leibnitz hat diese Rechnung zu erst gefunden. Es ist aber zu einerley Zeit der tieffsinnige Geometra Isaac Newton in Engelland auf eben dergleichen Gedancken kommen/ wie wol er eine andere Manier hat die unendlich kleinen Grössen zu exprimiren und auch die Rechnung selbst mit einem andern Nahmen nennet/ nemlich Methodum Fluxionum.;

Die 2. Erklährung.

383. Eine unendlich kleine Grösse ist diejenige/ welche so ein geringer Theil von der andern ist/ daß er mit ihr nicht verglichen werden kan.

Der 1. Zusatz.

384. Dannenhero ist sie in Ansehung

derjenigen Grösse/ mit welcher sie nicht verglichen werden kan/ für nichts zu halten.

Der 2. Zusatz.

385. Folgends wenn eine unendlich kleine Grösse zu einer andern addiret/ oder von ihr subtrahiret wird/ so ist in dem ersten Falle die Summe/ in dem andern die Differentz der gegebenen gleich zu achten/ das ist/ eine unendlich kleine Grösse kan eine endliche weder vermehren noch vermindern.

Die 1. Anmerckung.

386. Mercket aber wohl/ daß eine unendlich kleine Grösse nur in Ansehung einer andern für nichts zu achtē; in sich aber nicht nichts ist. Denn bildet euch ein/ ihr wollet die Höhe eines Berges messen und indem ihr über der Arbeit begriffen wäret/ jagte der Wind ein Körnlein Sand von der Spitze weg. So wäre der Berg umb den Diameter eines Sand-Körnleins niedriger worden. Allein weil weil die Methode/ wodurch die Grösse eines Berges gemessen wird/ so beschaffen ist/ daß die Höhe einerley gefunden wird/ ob das Sandkörnlein liegen bleibet/ oder von dem Winde weggejaget wird; kan man das Sand-Körnlein in Ansehung eines grossen Berges für nichts und also seine Grösse in Ansehung der Grösse des Berges für unendlich kleine halten. Dieses hat man schon längst überall in acht genommen/ wo man die Geometrie auf cörperliche Dinge in der Natur appliciret. Also setzen wir in der Astronomie/ der Diameter der Erde sey in Ansehung der Weite von der Sonne und noch mehr der Fixsterne für einen Punct oder unendlich kleine zu halten/ weil die erste Bewegung der Sterne sich eben so verhalten würde/ wenn die Erde würcklich ein untheilbahrer Punct wäre. So hal-

halten wir in den Mond-Finsternissen die Erde für eine vollkommene Kugel und also die Höhen der Berge in Ansehung des Diameters der Erde für unendlich kleine oder für nichts; weil der Schatten der Erde sich auf dem Monden nicht anders präsentiren würde/ wenn die Berge nicht da wären und die Erde die völlige Gestalt einer Kugel hätte. Da nun auch in der Geometrie/ da man die Grössen in abstracto betrachtet/ man grossen Vortheil davon hat/ wenn man sie in unendlich kleine Theile in Gedancken resolviret/ das ist/ in so kleine/ die in Ansehung ihrer für nichts zu halten sind/ in dem man daraus die endlichen Grössen öfters determiniren und ihre verborgene Eigenschaften auf die allerleichteste Manier finden kan: wer wil es den Geometris verdencken/ daß sie dergleichen vornehmen?

Die 2. Anmerckung.

387. Ihr wisset aus der gemeinen Geometrie/ daß eine Linie beschrieben wird/ wenn ein Punct sich durch einen gewissen Raum beweget; eine Fläche/ wenn eine Linie; ein Cörper/ wenn eine Fläche sich beweget. Also erwachsen die die Grössen/ in dem unendlich viel unendlich kleine Theile nach einander anwachsen. Und in dieser Absicht nennet sie *Nevton* Fluxionen oder Fluxiones.

Die 3. Erklährung.

388. **Wenn die unendlich kleinen Grössen als der Unterscheid zweyer endlichen angesehen werden/ nennet man sie Differential-Grössen.**

Die 4. Erklährung.

389. **Differentiiren heisset die Differen-**

ferential-Grösse von einer gegebenen endlichen finden.

Die 5. Erklährung.

390. Die Grössen/ welche immer wachsen/ oder abnehmen/ in dem andere unverändert bleiben/ heissen **veränderliche**; die andern aber **unveränderliche Grössen**. Also sind in einer Parabel die Abscissen und Semiordinaten veränderliche Grössen/ der Parameter aber ist eine unveränderliche. Denn in dem jene beyden beständig wachsen/ bleibt dieser unverändert (§. 204).

Zusatz.

391. Da nun die Differential-Grössen die unendlich kleine Theile sind/ welche nach und nach anwachsen/ in dem sie sich generiren (§. 387. 388); so haben die unveränderlichen Grössen keine Differential-Grösse.

Der 1. Willkührliche Satz.

392. Nennet die veränderlichen Grössen mit den letzten Buchstaben des Alphabets/ x/ y/ z; die unveränderlichen aber mit den ersten a/ b/ c &c.

Der 2. Willkührliche Satz.

393. Die Differential-Grösse von x nennet dx/ die von y nennet dy und so weiter.

Der

Der 1. Zusatz.

394. Also ist da / oder db / oder $dc = 0$ (§. 391).

Der 2. Zusatz.

395. Und die Differential-Grösse von $x + y - a$ ist $dx + dy$; die von $x - y + a$ aber $dx - dy$. Demnach ist es leicht die Grössen / welche zu einander addiret / oder von einander subtrahiret sind / zu differentiiren.

Die 1. Aufgabe.

396. **Zwey Grössen die einander multipliciren als xy zu differentiiren.**

Auflösung.

1. Multipliciret die Differential-Grösse der einen veränderlichen Grösse in die andere veränderliche Grösse.
2. Die beyden Producte addiret zusammen / so kommet die Differential-Grösse von xy heraus $x\,dy + y\,dx$.

Beweiß.

Lasset x und y umb ihre halbe Differential-Grösse vermehret und vermindert werden / so kommet im ersten Falle $x - \frac{1}{2}dx$ und $y - \frac{1}{2}dy$ / im andern Falle $y + \frac{1}{2}dx$ und $x + \frac{1}{2}dy$. Multipliciret beyde durch einander in beyden Fällen / so bekommet ihr $xy - \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$ und $xy + \frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$: wenn ihr beyde Producte von einander

abziehet/ so bleibet für die Differential-Grösse des Rectanguli xy übrig $xdy + ydx$. W. Z. E.

Der 1. Zusatz.

397. Wenn viel Grössen einander multipliciren/ so dörfet ihr nur zwey oder mehrere nacheinander als eine ansehen und ihr könnet sie nach der gegebenen Regel differentiiren. Z. E. Es sey xyv zu differentiiren / so ist die Differential-Grösse $xydv + xvdy + yvdx$. Denn es sey $xy = t$ / so ist $xyv = tv$/ folgends $d(xyv) = tdv + vdt$. Nun ist $dt = xdy + ydx$. Derowegen wenn ihr für t und dt die gehörigen Werthe setzet / so findet ihr $tdv + vdt = xydv + vxdy + vydx$.

Der 2. Zusatz.

398. Dannenhero findet ihr ferner die Differential-Grösse einer Potentz/ wenn ihr ihren Exponenten umb 1 vermindert/ und als denn die erniedrigte Potentz in ihren unveränderten Exponenten und die Differential-Grösse der Wurtzel multipliciret. Nemlich $d(x^2) = 2xdx$/ $d(x^3) = 3x^2dx$ und überhaupt $d(x^m) = x^{m-1}dx$.

Der 3. Zusatz.

399. Die Differential-Grösse von ay ist $ady + yda$. Nun ist $da = 0$ (§. 394). Derowegen ist $d(ay) = ady$.

Der

Der 4. Zusatz.

400. Weil $\sqrt{x} = x^{1:2}$ und überhaupt $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§.43) so ist die Differential-Grösse von einer Irrational-Grösse $(n:m) x^{n:m-1} dx = (n:m) x^{(n-m):m} dx = (n:m) \sqrt[m]{x^{n-m}} dx$.

Der 5. Zusatz.

401. Wiederumb weil $1:x = x^{-1}$ / $1:x^2 = x^{-2}$ und überhaupt $1:x^m = x^{-m}$ / so ist die Differential-Grösse von $1:x$ / und $1:x^2$ / ingleichen $1:x^m = -x^{-2}dx$ / $-2x^{-3}dx$ und $-m x^{-m-1} dx$.

Anmerckung.

402. Daß $1:x = x^{-1}$ $1:x^2 = x^{-2}$ / $1:x^3 = x^{-3}$ u. s. w. könnet ihr bald begreiffen/ wenn ihr nur bedencket/ es gehen die Exponenten in einer Arithmetischen Verhältnis fort/ in dem die Dignitäten in einer Geometrischen fortschreiten. Nun seyn die Dignitäten x^2, x, 1. $1:x$, $1:x^2$, $1:x^3$ / so sind die Expon. 2. 1. 0. -1. -2. -3.

Der 6. Zusatz.

403. Endlich weil $1:\sqrt{x} = 1:x^{1:2} = x^{-1:2}$ $1:\sqrt{x^3} = 1:x^{3:2} = x^{-3:2}$ und überhaupt $1:\sqrt[m]{x^n} = 1:x^{n:m} = x^{-n:m}$; so sind die Differential-Grössen von dergleichen Grössen $-\frac{1}{2} x^{-3}$ $-\frac{3}{2} x^{-5:2} dx$ und überhaupt x^3 $(-n:m) x^{-n:m-1} dx = (-n:m) x^{(-n-m):m} = -(n:m) \sqrt[m]{x^{m+n}} dx$.

Die 2. Aufgabe.

404. Zwey Grössen/ die einander dividiren/ $x:y$ zu differentiiren.

Auflösung.

Es sey $x:y = v$

so ist $x = vy$

$dx = vdy + ydv$ (§. 396)

$dx - vdy = ydv$

das ist/ $dx:y - xdy:y^2 = dv$

oder $(ydx - xdy):y^2 = dv$

Regel.

(1) Multipliciret die Differential-Grösse des Zehlers in den Nenner und (2) des Nenners in den Zehler. (3) Ziehet das letzte Product von dem ersten ab. (4) Das übrige dividiret durch das Qvadrat des Nenners.

Zusatz.

405. Wenn im Zehler und Nenner viel veränderliche Grössen enthalten/ könnet ihr sie gleichfals nach der gegebenen Regeln differentiiren/ wenn ihr zwey als eine ansehet. Denn es sey $xy:vz$ zu differentiiren. Setzet $xy = t$ und $vz = s$ so ist $d(xy:vz) = (sdt - tds):s^2$. Nun ist $dt = xdy + ydx$ und $ds = vdz + zdv$ (§. 396) Derowegen ist

sdt

$sdt - tds = vzxdy + vzydx - vxydv - xyzdv$, folgends $d(xy : vz) = (vzxdy + vzydx - xyzdv - xyvdz) : v^2z^2$.

Die 1. Anmerckung.

406. Wie wir die Regel in der Division gefunden, hättet ihr auch alle Regeln finden können, die in dem 4. 5 und 6. Zusatze der vorhergehenden Aufgabe (§. 400. 1. 3) auf eine andere Art hergeleitet worden. Denn setzet

$$\sqrt[m]{x^n} = v$$

so ist $x^n = v^m$

$$nx^{n-1}dx = mv^{m-1}dv \text{ (§. 398).}$$

$$nx^{n-1}dx : mv^{m-1} = dv$$

Nun ist $v^{m-1} = v^m : v = x^n : \sqrt[m]{x^n}$, folgends $nx^{n-1}dx\sqrt[m]{x^n} : mx^n = (n:m)x^{-1}dx\sqrt[m]{x^n} = (n:m)x^{-1}x^{n:m}dx = (n:m)x^{n:m-1}dx$, wie ihr es (§. 400) gefunden.

Die 2. Anmerckung.

407. Nach den bisher gegebenen Regeln können alle Grössen, sie mögen aussehen, wie sie wollen, differentiiret werden, und und ist die Rechnung, wie ihr sehet, einerley, die Grössen mögen rational oder irrational seyn. So findet ihr z. E. $d\sqrt{(x^2-y^2)} = d(x^2-y^2)^{1:2} = \frac{1}{2}(2xdx - 2ydy) : (x^2-y^2)^{1:2} = xdx - ydy : \sqrt{(x^2-y^2)}$ §. 400, und $d\sqrt{(aa-}$

$y^2) = d(a^2-y^2)^{1:2} - \frac{1}{2}. -2ydy:(a^2-y)^{1:2} = -ydy:\surd(a^2-y^2)$.

Die 3. Anmerckung.

408. Damit ihr den Nutzen der Differential-Rechnung in der höheren Geometrie sehet / so muß ich zeigen / wie die Eigenschafften der krummen Linien dadurch erfunden werden.

Von den Tangentibus der krummen Linien oder den geraden Linien die sie berühren.

Die 6. Erklährung.

409. Weil der Punct / so die krumme Linie beschreibet / in seiner Bewegung seine Direction beständig ändert (§. 5. Geom.); so kan man sich die krummen Linien vorstellen / als wenn sie aus unendlich kleinen geraden Linien zusammen gesetzt / und daher ein Polygon von unzehlich unendlich kleiner Seiten wären. Wenn ihr nun setzet / daß eine von diesen Seiten Mm in eine endliche gerade Linie TM verlängert wird; so ist selbige die Tangens der krummen Linie.

Tab. V. Fig. 46.

Zusatz.

410. Derowegen zeiget die Tangens die direction, welche der Punct / so die krumme Linie beschrieben / an jedem Theile derselben gehabt.

Die 7. Erklährung.

411. Die SUBTANGENS ist die Linie PT/ welche zwischen der Tangente TM und der Semiordinate PM enthalten ist. Tab. V. Fig. 46.

Die 8. Erklährung.

412. Wenn ihr in dem Puncte der Berührung M eine Perpendicular-Linie MR aufrichtet/ biß sie die Axe in R erreichet / so heisset sie die Normal-Linie; der Theil der Axe aber in H/ welcher zwischen ihr und der Semiordinate PM lieget/ die Subnormal-Linie.

Die 3. Aufgabe.

413. In einer jeden gegebenen Algebraischen Linie die zu einem gegebenen Puncte gehörige Subtangentem zu finden.

Auflösung.

Setzet die Semiordinate pm der andern PM unendlich nahe/ und ziehet MR mit der Axe HK parallel / so ist MR = Pp (§. 91. Geom.) die Differential der Abscisse AP/ mR die Differential der Semiordinate PM (§. 388). Weil nun PM mit pm parallel ist/ so ist der Winckel MmR dem Winckel TMP gleich (§. 92 Geom.) folgends da bey R und P rechte Winckel sind (§. 185. 186)/ MTP = mMR (§. 99. Geom.). Demnach ist mR : MR Tab. V. Fig. 46.

R = PM : PT / (§ 182 Geom.). Setzet nun PM = y / PA = x / so ist MR = dx / mR = dy (§. 393) / folgends $dy : dx = y$: PT / u. demnach PT = $ydx : dy$. Wenn ihr nun den Werth von dx aus der Æquation substituiret / welche die Natur einer krummen Linie insbesondere erkläret; so verschwindet dx und dy / und kommet die Subtangens TP in lauter endlichen Grössen heraus. W. Z. F. und Z. E.

Der 1. Zusatz.

414. Es sey $ax = y^2$ / so ist $adx = 2ydy$ / $dx = 2ydy : a$ / folgends PT = $ydx : dy = 2y^2dy : ady = 2y^2 : a = 2ax : a = 2x$. Derowegen ist in der Parabel die Subtangens TP zu der Abscisse AP wie 2 zu 1.

Der 2. Zusatz.

415. Es sey für unendliche Parabeln $a^{m-1}x = y^m$ / so ist

$$a^{m-1}dx = my^{m-1}dy \quad (\S.398.)$$

$$dx = my^{m-1}dy : a^{m-1}$$

$$PT = ydx : dy = my^m dy : a^{m-1} dy = my^m : a^{m-1} = ma^{m-1}x : a^{m-1} = mx.$$

Wenn also $m = 3$ / so ist PT = $3x$ / das ist / in der Parabel von dem andern Geschlechte ist PT : AP = 3 : 1 &c.

Der 3. Zusatz.

416. Es sey $a^n x^r = y^m$ / so ist

ran

$$ra^n x^{r-1} dx = my^{m-1} dy \quad (\S.398)$$

$$dx = my^{m-1} dy : ra^n x^{r-1}$$

$PT = ydx : dy = my^m dy : ra^n x^{r-1} dy = my^m : ra^n x^{r-1} = ma^n x^r : ra^n x^{r-1} = mx : r$. Setzet z. E. $a^3 x^2 = y^5$ so ist $PT = \frac{5}{2} x$/ das ist/ $PT : AP = 5 : 2$.

Der 5. Zusatz.

417. In dem Circul ist $ax - xx = yy$/ und demnach

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a-2x)$$

$PT = ydx : dy = 2y^2 dy : (a-2x) dy = 2y^2 : (a-2x) = (2ax - xx) : (a-2x)$. Solchergestalt ist $a-2x : 2a-x = x : PT$

Weil $PT = (2ax-xx) : (a-2x)$/ so ist $AT = (2ax-xx) : (a-x) - x = (2ax - xx - ax + xx) : (a-2x) = ax : (a-2x)$/ folgends $BP : 2AP = AB : TA$. Tab. V. Fig. 47.

Der 6. Zusatz.

418. Es sey für unendliche Circul (§. 243)

$$ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}$$

so ist $max^{m-1} dx - (m-1) x^m dx = (m+1) y^m dy$

$$dx = (m+1) y^m dy : max^{m-1} - (m-1) x^m$$

$PT = ydx : dy = (m+1) y^{m+1} : max^{m-1} - (m-1) x^m = (m+1)(ax^m - x^{m+1}) : max^{m-1} - (m-1) x^m$.

Dem-

Demnach ist $AT = (m+1)(ax^m - x^{m+1}) :, m ax^{m-1} - (m-1) x^m - x = (max^m - mx^{m+1} + ax^m - ax^{m+1} + max^m + mx^{m+1} + x^{m+1}) :, max^{m-1} - (m-1) x^m = ax^{m+1} : (max^{m-1} - (m-1) x^m)$.

Es sey ein Circul von dem anderen Geschlechte, so ist $m = 2$, also $PT = (3ax^2 - x^3) : (2ax - 3x^2)$ und $AT = ax^2 : (2ax - 3x^2)$ &c.

Der 7. Zusatz.

419. In der Ellipsi ist $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 224) und daher

$$2aydy = abdx - 2bxdx$$

$$dx = 2aydy : (ab - 2bx)$$

$PT = ydx : dy = 2ay^2dy : (ab - 2bx)\, dy = 2ay^2 : (ab - 2bx) = (2abx - 2bx^2) : (ab - 2bx)$.

Daher ist $AT = (2abx - 2bx^2) : (ab - 2bx) - x = (2abx - 2bx^2 - abx + 2bx^2) : (ab - 2ax) = ax : (a - 2x)$ wie im Circul.

Der 8. Zusatz.

420. Für unendliche Ellipses ist (§. 242) $ay^{m+n} = bx^m (a-x)^n$ und daher

$$(m+n)ay^{m+n-1} dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m (a-x)^{n-1} dx$$

$$(m+n)ay^{m+n-1} dy : (mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m (a-x)^{n-1}) = dx$$

$PT = ydx : dy = (m+n)ay^{m+n} : (mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m (a-x)^{n-1}) = (mbx^m (a-x)^n + nbx^m (a-x)$

$(a-x)^n) : (mbx^{m-1} (a-x)^n - nbx^m (a-x)^{n-1})$ $=$ (wenn ihr mit bx^{m-1} und $(a-x)^{n-1}$ dividiret) $(m+n)(ax-xx) : (ma-mx-nx)$.

Derowegen ist AT $(m+n, ax-xx) : ma-mx-nx)-x = (max-mx^2+nax-nx_2-max+m_2 x^2+nx^2) : (ma-m-xnx) = nax : (ma-mx-nx)$.

Es sey z. E. eine Ellipsis von dem andern Geschlechte/ so ist $m = 2$/ $n = 1$ (§. 242) / PT $= (3ax-3xx) : (2a-3x)$/ AT $= ax : (2a-3x)$

Der 9. Zusatz.

421. Für eine Hyperbel ist $ay^2 = abx+bxx$ und daher findet ihr wie §. 419 PT $= (2ax+2xx) : (a+2x)$ und AT $= ax : (a+2x)$.

Der 10. Zusatz.

422. Für unenendliche Hyberbeln ist $ay^{m+n} = bx^m (a-x)^n$ (§. 265). Derowegen findet ihr wie §. 420 PT $= (m+n)(ax+xx) : (ma+mx+nx)$ und AT $= ax : (ma+mx+nx)$.

Der 11. Zusatz.

423. Für eine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist $xy = aa$ (§. 265)

Daher $xdy+ydx = 0$ (§. 394. 396).

$ydx = -xdy$

PT $= ydx : dy = -xdy : dy = -x$.

Also ist die Subtangens der Absciße gleich/ muß aber/ weil $-x$ ist/ ihrem Uhrsprunge entge-

gegen gesetzt werden / das ist / wenn der Punct / wovon die Abscissen gerechnet werden / zur Lincken der Semiordinate ist / so wird die Subtangens auf der Axe zu ihrer Rechten genommen.

Der 12. Zusatz.

424. Für unendliche Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten ist $a^{m+n} = yx^n$ (§. 266)

Daher $0 = mx^n y^{m-1} dy + nx^{n-1} y^m dx$

$-mx^n y^{m-1} dy : nx^{n-1} y^m = dx$

$PT = y dx : dy = -mx^n y^m : nx^{n-1} y^m = -mx : n.$

Es sey eine Hyperbel von dem andern Geschlechte / so ist $m = 2$ / $n = 1$ / $PT = -2x$.

Der 13. Zusatz.

425. Endlich weil für alle Algebraische Linien

$ay^m + bx^n + cy^r x^s + f = 0$ / so ist

$may^{m-1} dy + nbx^{n-1} dx + rcy^{r-1} x^s dy + scy^r x^{s-1} dx = 0$

$nbx^{n-1} dx + scy^r x^{s-1} dx = -may^{m-1} dy - rcy^{r-1} x^s dy$

$dx = (-may^{m-1} dy - rcy^{r-1} x^s dy) : (nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1})$

PT

$PT = ydx : dy = (-maym - rcy^r) : (nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1})$ nach welcher Regel aller Algebraischen Linien Subtangentes gefunden werden / wenn ihr für die undeterminirte Buchstaben *a/ c/ b* und die Exponenten *m/ n/ r/ s* ihren Werth aus ihrer Gleichung setzet. Z. E. Weil für die Parabel vom ersten Geschlechte

$ax = y^2$ / oder $y^2 - ax = 0$ so ist

$$\frac{ay^m = y^2}{a = 1 \quad m = 2} \quad \frac{bx^n = -ax}{b = -a \quad n = 1} \quad \frac{cy^r x^s = 0}{c = 0 \quad r = 0} \quad \frac{f = 0}{s = 0}$$

daher $PT = (-2.1y^2 - 0.0y^0) : (-1.ax^{1-1} + 0.0y^0 x^0) = -2y^2 : -a = 2ax : a = x$.

Wiederumb es sey $y^3 - x^3 - axy = 0$ / so ist

$$\frac{ay^m = y^3}{a = 1 \quad m = 3} \quad \frac{bx^n = -x^3}{b = -1 \quad n = 3} \quad \frac{cy^r x^s = -axy}{c = -a \quad r = 1} \quad \frac{f - 0}{s = 1}$$

daher $PT = (-3.1y^3 - 1.-ay) : (3.-1x^{3-1} + 1.-ay) = (-3y^3 + axy) : (-3x^2 - ay) = (3y^3 - ay) : (3x^2 + ay)$: folgends $AT = (3y^3 - ay) : (3x^2 + ay) - x = (3y^3 - axy - 3x^2 - axy) : (3x^2 + ay) = (3axy - 2axy) : (3x^2 + ay) = axy : (3x^2 + ay)$.

Der 14. Zusatz.

425. Wenn ihr die Subtangentem PT habet / könnet ihr auch die Tangentem TM ziehen.

Der 15. Zusatz.

426. Weil $PT = ydx : dy$ / $PM = y$ / so

ist $TM = \sqrt{(y^2 dx^2 : dy^2 + y^2)} = \sqrt{(y^2 dx^2 + y^2 dy^2 : dy^2)} = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dy$.

Die 4. Aufgabe.

Tab. V. Fig. 46. 427. Die Subnormal-Linie PH in einer Algebraischen Linie zu finden.

Auflösung.

Weil der Triangel TMH bey M rechtwincklicht ist/ so ist TP : PM = PM : PH (§. 195 Geom.) $(ydx : dy) : y = y : PH$.

Derowegen $PH = y^2 dy : ydx = ydy : dx$. Wenn ihr demnach aus der Æquation für eine besondere Linie den Werth von dy durch x exprimiret; so bekommet ihr die Subormal-Linie/wie vorhin die Subtangentem, in lauter endlichen Grössen.

Der 1. Zusatz.

428. Es sey $ax = y^2$/

so ist $adx = 2ydy$

$\frac{1}{2} adx = ydy$

$PH = ydy : dx = adx : 2dx = \frac{1}{2} a$

Demnach ist in der Parabel die Subnormal-Linie beständig dem halben Parameter gleich/ folgends die Normal-Linie $MH = \sqrt{(yy + \frac{1}{4}aa)} = \sqrt{(ax + \frac{1}{4}aa)}$. Nun ist die Linie/ die aus dem Brenn-Puncte in M gezogen wird/ $= x + \frac{1}{4} a$. Derowegen ist das Qvadrat der Normal-

mal-Linie gleich einem Rectangulo aus dem Parameter in die Linie/ so aus dem Brenn-Puncte an das Ende der Semiordinate gezogen wird.

Anmerckung.

429. Eben so findet ihr die Subnormal-Linie in allen anderen Fällen/ und durch deren Hülfe könnet ihr aus jedem gegebenen Puncte einer Algebraischen Linie eine Perpendicular-Linie HM aufrichten. Z. E. im Circul ist

$$ax - xx = y^2$$

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$\frac{1}{2}adx - xdx = ydy$$

$$PH = ydy : dx = \frac{1}{2}a - x.$$

Daher ist klahr das alle Normal-Linien in dem Circul durch das Centrum gehen/ oder/ daß alle Radii des Circuls auf der Peripherie perpendicular stehen und demnach die Tangens des Circuls mit dem Radio einen rechten Winckel macht. Woraus erhellet/ daß/ wenn ihr die Tangentes, Subtangentes, Normal- und Subnormal-Linien suchet/ dadurch noch viele andere Eigenschaften der krummen Linien gantz leichte entdecket werden/ die sonst einen sehr weitläufftigen Beweiß erfordern.

Der 2. Zusatz.

430. Weil $PH = ydy : dx$/ so ist MH

$= \sqrt{(y^2 + y^2 dy^2 : dx^2)} = \sqrt{(y^2 dx^2 + y^2 dy^2 / : dx^2)} = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx.$

Der 3. Zuſatz.

431. Dannenhero iſt TM : MH $= y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dy / : y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx = dy : dx.$

Die 5. Aufgabe.

432. **Die Aſymptoten einer Algebraiſchen Linie zu determiniren.**

Auflöſung.

Tab. V. Fig. 46. 1. Wenn die Abſciſſe AP unendlich groß wird/ ſo iſt die Tangens TM die Aſymptote/ als welche die krumme Linie nicht eher als in einer unendlichen Diſtantz/ das iſt/ niemals berühren kan (§. 257). Daher werden die unveränderlichen Gröſſen in Anſehung der Abſciſſe x unendlich kleine. Wenn ihr demnach in dem Werthe von AT diejenigen Gröſſen weglaſſet/ die nicht mit x multipliciret ſind; ſo findet ihr die Diſtantz des Punctes C/ daraus die Aſymptote CD gezogen wird / von dem Scheitel-Puncte A.

Z. E. In der Hyperbel iſt AT $= ax : (a + 2x)$ und demnach a in Anſehung x unendlich kleine/ folgends $ax : 2x = \frac{1}{2} a$ — AC / wie ſchon oben (§. 260) auf andere Art erwieſen worden.

2. Laſ-

2. Lasset nun ferner auch in der Æquation für die krumme Linie die unveränderlichen Grössen, die durch keine andere multipliciret sind weg; so könnet ihr dadurch den Werth von AE finden und folgends die Asymptote ziehen.

Z. E. In der Hyperbel ist $ay^2 = bx(a+x)$. Da nun a in Ansehung x unendlich kleine ist, so habet ihr $ay^2 = bx^2$,

folgends $y\sqrt{a} = x\sqrt{b}$

$$dy\sqrt{a} = dx\sqrt{b}$$

$$dx : dy = \sqrt{a} : \sqrt{b}$$

Nun ist $dx : dy = AC : AE$ (§. 182 Geom) das ist $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \frac{1}{2}a : AE$.

Demnach ist $AE = \frac{1}{2}a\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{4}aab} : \sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$, wie abermal oben (§. 260) schon auf andere Art erwiesen worden.

Zusatz.

433. In unendlichen Hyperbeln ist überhaupt $AT = ax : (ma + mx + nx)$. Daher $AC = nax : (mx + nx) = na : (m+n)$. Und weil ferner

$$ay^{m+n} = bx^m (a+x)^n$$

so ist $ay^{m+n} = bx^{m+n}$

oder, wenn ihr $m+n = r$ setzet

$$ay^r = bx^r$$

$$ya^{1:r} = xb^{1:r}$$

$$dya^{1:r} = dxb^{1:r}$$

$$dx:dy = a^{1:r}:b^{1:r} = AC:AE$$

$$a^{1:r}:b^{1:r} = (na:r):AE$$

Derowegen ist $AE = nab^{1:r}:ra^{1:r}$

$$= na^{r-1:r}b^{1:r}:r = (n:r)\sqrt[r]{a^{r-1}b}.$$

Die 6. Aufgabe.

404. Die Subtangentem AH in einer Spiral-Linie zu finden.

Auflosung.

Tab. V. Fig. 48. Es sey der halbe Diameter des Circuls AB a, die Peripherie $= b$, der Bogen BC $= x$, AG $= y$, so ist CD $= dx$, EF $= dy$. Weil nun AC der Linie AD unendlich nahe ist, so könnet ihr EG als einen Bogen ansehen, der mit dem halben Diameter AG beschrieben worden. Demnach ist

$$AD : AG = CD : EG$$
$$a \quad y \quad dx \quad ydx:a$$

Weil EG mit FA einen rechten Winckel macht (§. 429) und AH ist gleichfals auf EA perpendicular aufgerichtet worden; so ist (§. 182. Geom.)

FE :

$$FE : EG = GA : AH$$
$$dy \quad ydx : a \qquad y \quad y^2dx : ady$$

Nun ist für die Archimedische Spiral-Linie

$$ax = by \quad (\S. 272).$$

daher $adx = bdy$

$$dx = bdy : a$$

$$AH = y^2dx : ady = by^2 : a^2 = axy : a^2$$
$$= xy : a$$

Der 1. Zusatz.

405. Also könnet ihr die Subtangenten nicht finden / ihr müsset vorher den Circul-Bogen x in eine gerade Linie verwandeln können.

Der 2. Zusatz.

406. Für unendliche Spiral-Linien ist

$$a^m x^n = b^n y^m \quad (\S. 273)$$

$$na^m x^{n-1} dx = mb^n y^{m-1} dy$$

$$dx = mb^n y^{m-1} dy : na^m x^{n-1}$$

$$AH = y^2dx : ady = mb^n y^{m+1} : na^{m+1} x^{n-1}$$
$$= ma^m x^n y : na^{m+1} x^{n-1} = mxy : na.$$

Der 3. Zusatz.

407. Setzet / daß der Bogen BC sich zu FC verhalten solle wie die Abscisse in einer Algebraischen Linie zu ihrer Semiordi-

nate. Solchergestalt ist BC $= x$/ CD $=$ dx/ FC $= y$/ EF $= dy$.

Nun ist

$$AD : AG = CD : EG$$
$$r \quad r-y \quad dx \quad (rdx-ydx):r$$
$$FE : EG = GA : AH$$
$$dy \quad (rdx-ydx):r \quad r-y \quad (r-y)^2 dx : rdy$$

Wenn ihr nun für dx in dem Werthe von AH seinen Werth aus der Æquation einer Algebraischen Linie setzet; so habet ihr die Subtangentem AH.

Z. E. In der Parabel ist $ax = y^2$/ und also $dx = 2ydy : a$ Derowegen wenn der Bogen BC die Abscisse einer Parabel/ FC die Semiordinate und a ihren Parameter vorstellet; so ist AH $= 2(r-y)^2 ydy : ady$ $= (2r^2y - 4ry^2 + y^3) : a = (2r^2y - 4arx + axy) : a = xy - 4rx + 2r^2y : a$.

Anmerckung.

408. Ihr könnet BC für die Abscisse und FC für die Semiordinate einer jeden Algebraischen Linie annehmen/ und aus der allgemeinen Æquation für alle krumme Linien einen allgemeinen Werth für AH finden.

Die 7. Aufgabe.

Tab. V. 409. **Die Subtangentem AT in der**
Fig. 49. **Conchoide des Nicomedis zu finden.**

Auflösung.

Richtet AT auf AM perpendicular auf/

und

und ziehet Am mit AM unendlich nahe. Lasset über dieses die beyden Perpendicular-Linien MR und PQ fallen. Nun sey AH = b, PM = a, AM = y, AP = x, so ist $x-y=a$ (§. 276) und Qp = dx, Rm = dy. Nun sind bey Q und A rechte Winckel. MPp = HPA (§. 58 Geom.), MPp = PAp + PpA = PpA, weil PAp unendlich kleine ist (§. 385), folgends ist auch QPp = AHP (§. 99 Geom.) und daher (§. 182 Geom.).

$$AP : AH = pQ : PQ$$
$$x \quad b \quad dx \quad bdx:x$$

Nun ist ferner (§. 177 Geom.)

$$AP : PQ = AM : MR$$
$$x \quad bd:x \quad y \quad bydx:x^2$$

Endlich weil wie vorhin erwiesen werden kan, daß jeder Winckel in dem Triangel MRm so groß ist wie jeder in dem andern TAM, so habet ihr (§. 182 Geom.).

$$Rm : RM = AM : AT$$
$$dy \quad bydx:x^2 \quad y \quad by^2dx:x^2dy$$

Weil nun in der Conchoide des Nicomedis

$$y-x=a$$

so ist $y=a+x$

$$dy=dx$$

$AT = by^2dx : x^2dy = by^2 : a^2$.

Die 8. Aufgabe.

Tab V. Fig. 50. 410. Die Subtangentem PT in der Cycloide zu finden.

Auflösung.

Es sey APB der Circul/der die Cycloidem beschreibet/KP die Tangens des Circuls/qm der andern Linie QM unendlich nahe und MR mit dem unendlich kleinen Bogen Pp parallel/ den ihr für eine gerade Linie halten könnet. Da nun MS = Po und der Winckel bey R so groß wie der bey pO (§. 92 Geom.) folgends weil bey S und O rechte Winckel sind M = P (§. 99 Geom.) so ist auch MR = Pp (§. 68 Geom). Es sey AP = x/PM = y/ so ist Pp = MR = dx/mR = dy. Nun ist MR mit MT parallel/und daher MmR = TMP (§. 92 Geom.). Und weil MR mit TP parallel ist/ so ist mRM = mPT = MPT (§. cit.) folgends mMR = MTP (§. 99 Geom.) und daher (§. 182 Geom.)

$$\begin{array}{cccc} mR : & MR = & PM : & PT \\ dy & dx & y & ydx:dy \end{array}$$

Nun ist in der Cycloide (§. 286) $y = x$ und daher $dy = dx$/ folgends $ydx : dy = y$.

Der 1. Zusatz.

411. Wenn ihr also die Tangentem des Circuls TK (§. 429) ziehet; so ist es auch leichte die Tangentem der Cycloidis TM zuziehen.

Der

Der 2. Zusatz.

412. Lasset APB eine andere Algebraische krumme Linie seyn/ derer Tangentem ihr ziehen könnet/ ihre Bogen aber AP die Abscissen der Transcendentischen Linie AMC; so könnet ihr auf gleiche Weise ihre Tangentes ziehen. Es sey Z. E.

$$bx = ay$$

so ist $$bdx = ady$$

$$dx = ady:b$$

$$PT = ydx:dy = aydy = ay:b.$$

Die 9. Aufgabe.

413. Die Subtangentem TP zu der Logarithmischen Linie zu finden. Tab. V. Fig. 51.

Auflösung.

Es sey AX die Axe/ PM die Ordinate. Setzet AP = x/ PM = y/ so ist Pp = RM = dx/ mR = dy und weil die Aehnlichkeit der Triangel mRM und PMT wie oben §. 413 erwiesen werden kan; so ist (§. 182 Geom.)

mR : RM = PM : PT
dy dx y $ydx:dy$

Setzet eine andere Abscisse = v/ die zugehörige Semiordinate = z: so ist die Subtangens = $zdv:dz$. Weil die Abscissen, in einer

A-

Arithmetischen Progreßion fortgehen / so ist $dx = dv$. Hingegen weil die Semiordinaten in einer Geometrischen fortschreiten (§. 284) / so ist

$$y : y + dy = z : z + dz$$

daher $y : dy = z : dz$ (§. 130)
$dx = dv$

$$y\,dx : dy = z\,dv : dz$$

Also sind in der Logarithmischen Linie alle Subtangentes einander gleich / oder die Subtangens ist eine unveränderliche Linie.

Von den grösten und kleinesten Applicaten der krummen Linien.

Die 9. Erklährung.

414. Wenn die Semiordinaten bis zu einem gewissen Ziele immer mit den Abscissen wachsen / hernach aber wieder abnehmen / unerachtet diese noch beständig zunehmen; so nennet man die Gröste diejenige / wo der Wachsthum aufhöret. Jngleichen wenn sie bis auf ein gewisses Ziel immer abnehmen / indem die Abscissen zunehmen / und hernach mit diesen fortwachsen / so heisset diejenige die Kleineste / wo die Verringerung aufhöret. Die Methode einen Werth der Abscisse in lauter unver-

veränderlichen Grössen zu finden / dem die gröste oder kleineste Applicate oder Semiordinate zukommet / nennet man die **Methode von den Grösten und den Kleinesten.** (Methodum de maximis & minimis).

Anmerckung.

415. Man kan durch diese Methode auch viel andere Fragen auflösen / da das gröste oder kleineste unter Dingen von einer Art gesucht wird; wie es die folgenden Exempel zeigen werden.

Die 10. Aufgabe.

416. **Die gröste oder kleineste Applicate in einer Algebraischen Linie zu determiniren.** Tab. V. Fig. 47.

Auflösung.

Es ist klahr / daß die Tangens in dem Puncte D / wo die gröste oder kleineste Applicate ist / mit der Axe parallel laufft / und daher die Subtangens unendlich groß ist; wenn nun in allen Algebraischen Linien die Subtangens $ydx : dy$ (§. 413) unendlich groß wird; so ist dy in Ansehung des Zehlers ydx unendlich kleine / weil er dy unendlich mal in sich begreiffen muß / und darumb $dy = o$ (§. 384). Suchet derowegen aus der gegebenen Æquation fü die krumme Linie die Differential-Grösse der Applicate und setzet sie $= o$; so könnet ihr aus dieser Æquation den Werth von x durch gehörige Reduction finden.

In

In einigen Linien fället die Tangens in die Applicate DE und alsdenn ist die Subtangens $ydx : dy = 0$. Wenn nun dieser Bruch unendlich kleine seyn soll / so muß dy unendlich groß seyn in Ansehung des Zehlers ydx. Dannenhero wenn $dy = 0$ keinen möglichen Werth für die Abscisse zur grösten Applicate giebet; so setzet $dy = \infty$ / das ist / einem unendlichen Werthe / und suchet aus dieser Gleichung die Abscisse x.

Der 1. Zusatz.

417. Im Circul ist

$$ax - xx = y^2$$

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$(adx - 2xdx) : 2y = dy = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Die Abscisse / welche in dem Circul der grösten Applicate zugehöret; ist dem halben Diameter gleich.

Der 2. Zusatz.

418. Für unendliche Circul ist

$$max^{m-1}dx - (m-1)x^m dx = (m+1)y^m dy = 0$$

$$max^{m-1} = (m-1)x^m$$

$$x^{m-1}$$

$$ma = (m-1)x$$

$$ma:(m-1)=x$$

Es sey $m=3$, so ist es ein Circul von dem dritten Geschlechte und $x=\frac{3}{2}a$.

Der 3. Zusatz.

419. Für unendliche Ellipses ist

$$(m+n)ay^{m+n-1}dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m (a-x)^{n-1} dx$$

$$dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m (a-x)^{n-1} dx, : (m+n)ay^{m+n-1} = 0$$

$$nbx^m (a-x)^{n-1} = mbx^{m-1}(a-x)^n$$

$$nbx = mba - mbx$$

$$nbx + mbx = mba$$

$$x = ma:(m+n)$$

Es sey $m=1$, $n=1$, so ist es eine Ellipsis von dem ersten Geschlechte und $x=\frac{1}{2}a$, wie im Circul. Hingegen sey $m=2$, $n=1$, so ist es eine Ellipsis von dem andern Geschlechte und $x=\frac{2}{3}a$.

Der 3. Zusatz.

420. Es sey $x^3 + y^3 = axy$

so ist $3x^2dx + 3y^2dy = axdy + aydx$

$$3x^2dx - aydx = axdy - 3y^2dy$$

$$(3x^2dx - aydx):(ax - 3y^2) = dy = 0$$

$$3x^2 = ay$$

$$3x^2 : a = y$$

$$x^3 + 27x^6 : a^3 = 3ax^3 : a = 3x^3$$

$$27x^6 = 2a^3x^3$$

$$27x^3 = 2a^3$$

$$3x = a\sqrt[3]{2}$$

$$x = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$$

Der 5. Zusatz.

421. Es sey $y - a = a^{1:3} \; (a-x)^{2:3}$

$$dy = -2dxa^{1:3} \; : 3(a-x)^{1:3} = 0$$

$$-2a^{1:3} = 0$$

Weil ihr keinen Werth von x findet, wenn ihr $dy = 0$ setzet, so nehmet

$$dy = -2dxa^{1:3} : 3(a-x)^{1:3} = \infty$$

Also ist $3(a-x)^{1:3}$ in Ansehung seines Zehlers $2dxa^{1:3}$ unendlich kleine. Darumb habet ihr

$$3(a-x)^{1:3} = 0$$

$$a - x = 0$$

$$a = x$$

Die

Die 11. Aufgabe.

422. Aus dem gegebenen Puncte R in der Axe einer krummen Linie an die Peripherie eine gerade Linie NR ziehen/ welche die kleineste unter allen ist/ die sich aus diesem Puncte ziehen lassen. Tab. II. Fig. 15.

Auflösung.

Es sey AP $= x$/ PM $= y$/ AR $= c$/ so ist PR $= c - x$/ und/ weil $(PM)^2 + (PR)^2 = (MR)^2$ (§. 167 Geom.)/ $c^2 - 2cx + xx + yy = (MR)^2$. Nehmet MR an als die Applicate einer krummen Linie und setzet

$$c^2 - 2cx + xx + yy = z^2$$

so ist $2xdx - 2cdx + 2ydy = 2zdz$

$$(2xdx - 2cdx + 2ydy) : 2z = dz = 0$$

$$xdx - cdx + ydy = 0$$

Wenn ihr nun aus der Æquation für eine krumme Linie den Werth von ydy substituiret; so könnet ihr daraus AP determiniren/ der die Applicate PN zugehöret/ dahin die kürtzeste Linie NR gezogen wird.

Der 1. Zusatz.

423. Es sey für eine Parabel

$$ax = yy$$

so ist $adx = 2ydy$

$$\tfrac{1}{2}adx = ydy$$

$$xdx - cdx + ydy = xdx - cdx + \tfrac{1}{2}adx = 0$$

$$x - c + \tfrac{1}{2}a = 0$$

$$x = c - \tfrac{1}{2}a.$$

Der 2. Zusatz.

424. Es sey für eine Ellipsin

$$ay^2 = abx - bx^2$$

so ist $2aydy = abdx - 2bxdx$ — $2a$

$$ydy = \tfrac{1}{2}bdx - bxdx : a$$

$$xdx - cdx + ydy = xdx - cdx + \tfrac{1}{2}bdx - bxdx : (a = 0$$

$$x - c + \tfrac{1}{2}b - bx : a = 0$$

$$ax - ac + \tfrac{1}{2}ab - bx = 0$$

$$ax - bx = ac - \tfrac{1}{2}ab$$ — $a-b$

$$x = (ac - \tfrac{1}{2}ab) : (a-b)$$

Der 3. Zusatz.

425. Auf gleiche Weise findet ihr für die Hyperbel, daß $x = (ac + \tfrac{1}{2}ab) : (a + b)$.

Die 12. Aufgabe.

426. Eine Linie AB dergestalt in E

zu schneiden, daß das Product aus dem Qvadrate des einen Theiles AE in den andern EB das gröste sey unter allen, die auf dergleichen Art formiret werden können. Tab. V. Fig. 49.

Auflösung.

Es sey AB = a, AE = x, so ist $(AE)^2$. EB = $axx - x^3$. Setzet demnach, es sey eine krumme Linie, in welcher

$$axx - x^3 = aay$$

so ist $2axdx - 3x^2dx = aady$

$$(2axdx - 3x^2dx) : aa = dy = 0$$

$$2ax = 3x^2$$

$$\tfrac{2}{3}a = x$$

Die 13. Aufgabe.

427. Eine Linie AB dergestalt in E zu schneiden, daß das Product aus einer gegebenen Dignität des einen Theiles AE in eine gegebene Dignität des andern Theiles EB das gröste unter allen sey, die auf dergleichen Art formiret werden. Tab. V. Fig. 49

Auflösung.

Es sey AB = a, AE = x, so ist $x^m (a-x)^2$ das groste von seiner Art. Setzet demnach

$$x^m(a-x)^n = a^{m+n-1}y$$

so ist $mx^{m-1}(a-x)^n dx - nx^m(a-x)^{n-1}dx = (a^{m+n-1}dy$

$(mx^{m-1}(a-x)^n dx - nx^m(a-x)^{n-1}dx) : a^{m+n-1} (= dy = 0$

$$mx^{m-1}(a-x)^n = nx^m(a-x)^{n-1}$$

$$m(a-x)^n = nx(a-x)^{n-1}$$

$$ma - mx = nx$$

$$ma:(m+n) = x$$

Die 13. Aufgabe.

428. **Unter allen Parallelepipedis, die einem gegeben Würfel gleich sind, und deren eine Seite gegeben wird, dasjenige zufinden, das die geringste Fläche hat.**

Auflösung.

Es sey b die eine Seite, x die andere, der gegebene Würfel $= a^3$, so ist die dritte $= a^3:bx$.

Folgends die Fläche des Parallelepipedi $2bx + 2a^3:x + 2a^3:b$. Setzet demnach es sey in einer krummen Linie

$$2bx + 2a^3:x + 2a^3:b = ay$$

so

so ist $2bdx - 2a^3dx : x^2 = ady = 0$

$$2b - 2a^3 : x^2 = 0.$$

$$bx^2 = a^3$$

$$x^2 = a^3 : b.$$

$$x = \sqrt{(a^3 : b)}$$

Also sind die drey Seiten b, $\sqrt{(a^3 : b)}$ und $a^3 : b \sqrt{(a^3 : b)} = \sqrt{(a^6 : \sqrt{(b^2a^3 : b)})} = \sqrt{(a^6 b : \sqrt{(a^3b^2)})} = \sqrt{(a^3 : b)}$.

Die 14. Aufgabe.

429. **Unter allen Parallelepipedis, die einem gegebenen Würfel gleich sind, dasjenige zufinden, so die kleineste Fläche hat.**

Auflösung.

Es sey der gegebene Würfel $= a^3$, die eine Seite $= x$, so sind die beyden andern Seiten (§. 428) $\sqrt{(a^3 : x)}$, und daher ist die Fläche des Parallelepipedi $= 2a^3 : x + 4\sqrt{a^3x}$. Da nun dieses die kleineste von ihrer Art ist, so setzet die Æquation für eine krumme Linie

$$2a^3 : x + 4\sqrt{a^3x} = ay$$

so ist $-2a^3dx : x + 2a^3dx : \sqrt{a^3x} = ady$

$$-2a^3dx : x^2 + 2a^2dx : \sqrt{a^3x} = 0$$

$$a^2 : \sqrt{a^3 x} = a^2 : x^2$$

$$x^2 = \sqrt{a^3 x}$$

$$x^4 = a^3 x$$

$$x^3 = a^3$$

$$x = a$$

Also hat der Würfel selbst die kleineste Fläche.

Die 16. Aufgabe.

430. **Unter allen Kegeln/ die innerhalb einer Kugel beschrieben werden können/ denjenigen zu determiniren/ der die gröste Fläche hat.**

Tab. VI. Fig. 50.

Auflösung.

Es ist klahr/ daß wenn sich ein halber Circul umb seinen Diameter AB wendet/ derselbe eine Kugel/ die Triangel aber ANP/ AFE/ &c. Kegel beschreiben. Die Fläche des Kegels kommet heraus/ wenn ihr die Seite des Kegels FE durch die Peripherie/ die mit dem Radio TE beschrieben worden/ multipliciret. Weil ihr nun die gröste von ihrer Art suchet/ so setzet AE $= x$/ AB $= a$/ und es ist FE $= \sqrt{(ax - xx)}$ (§ 195 Geom.) die Peripherie $m\sqrt{(ax - xx)}$ AF $= \sqrt{ax}$. Derowegen habet ihr die Æquation für eine krumme Linie

m

$$m\sqrt{(ax-xx)}\sqrt{ax} = ay$$

$$m\sqrt{(a^2x^2-ax^3)} = ay$$

$$2ma^2xdx-3max^2dx : m\sqrt{(a^2x^2-ax^3)} = ady$$

$$2ax-3x^2 = 0$$

$$2a = 3x^2$$

$$\frac{2}{3}a = x$$

Ende des andern Theiles.

Der dritte Theil
Von den
Anfangs-Gründen
Der
Integral-Rechnung.

Die 1. Erklährung.

431. Die Integral-Rechnung ist eine Wissenschaft aus einer gegebenen unendlich kleinen Grösse diejenige endliche zufinden / durch deren Differentiirung sie entstehet.

Zusatz.

432. Derowegen habet ihr eine gewisse Probe ob ihr die rechte Grösse gefunden / wenn ihr die gefundene Integral nach den oben gegebenen Regeln differentiiret und die gegebene Differential wieder heraus kommet.

Die 2. Erklährung.

433. Integriren oder Summiren heisset die Grösse finden / aus welcher durch Differentiirung die gegebene unendlich kleine entstanden.

Die 1. Aufgabe.

434. Eine gegebene Differential zu integriren oder summiren.

Auf-

Auflösung.

Gleichwie man die Differentiale der veränderlichen Grössen durch *d* andeutet; so pfleget man die Integrale derselben als die Summe unendlicher unendlich kleiner Grössen durch $\int$ anzudeuten. Daher heisset $\int ydx$ so viel als die Integral von ydx.

Wann ihr nun die Integral finden wollet/ so vergleichet die gegebene Differential mit denen/ so ihr oben (§. 393 & seqq.) gefunden: so werdet ihr bald wahrnehmen / wie die Veränderung vorzunehmen sey. Es ist aber

I. $\int dx = x$

II. $\int (dx \pm dy) = x \pm y \pm a$ oder $x \pm y$

III. $\int (xdy + ydx) = xy$

IV. $\int mx^{m-1}dx = x^m$

V. $\int (n:m)\, x^{n-m,:m} dx = x^{n:m}$

VI. $(ydx - xdy) : y^2 = x:y$

Von diesen Formeln seyd ihr gewiß / daß sie sich alle integriren lassen/ und zwar setzet ihr in dem andern und ersten Falle nur an stat dx oder dy die veränderliche Grösse x oder y selbst. In dem dritten multipliciret ihr die beyden veränderlichen Grössen xy durch einander/ dadurch ihre Differentiale dy und dx multipliret sind. In dem vierdten und fünfften (welcher der gewöhnlichste ist) addiret ihr zu dem Exponenten der Dignität der veränderlichen Grösse 1 und durch den vermehr-

ten und die Differential der veränderlichen Grösse dividiret ihr die gegebene Differential. Endlich in dem sechsten Falle nehmet ihr die veränderliche Grösse mit dem Zeichen - für den Zehler und die Wurtzel von dem Qvadrate des Nenners für den Nenner an.

Die 1. Anmerckung.

435. Es können zwar noch viel andere Fälle vorkommen / die hier nicht berühret werden: allein ihr werdet es besser aus folgenden Exempeln / als durch weitläuftige Regeln finden.

Die 2. Anmerckung.

436. Mercket aber daß einige Grössen sind / die sich nicht integriren lassen. Denn wie man in der gemeinen Algebra zwar alle Grössen zu einer verlangten Dignität erheben / nicht aber aus jeder Dignität eine verlangte Wurtzel ausziehen kan; eben so kan man in der höheren Analysi zwar eine jede veränderliche Grösse differentiiren / allein nicht eine jede Differential summiren. Gleichwie man aber in der gemeinen Algebra die Wurtzel durch Näherung suchet / eben so pfleget man in der höheren die Integral durch Näherung zu suchen / wo man sie nicht vollkommen haben kan. Allein zur Zeit hat man noch keine Regel / daraus man schliessen könte / ob die Summation stat findet oder nicht / und können wohl einige Differentiale zum Summiren geschickt seyn / die wir zur Zeit noch nicht summiren können.

Von den Qvadraturen der krummen Linien.

Die 3. Erklährung.

437. Die Differential oder das Ele-

Element einer ebenen Fläche/ die in eine krumme und zwey gerade Linien eingeschlossen/ als AMP/ ist das Rectangulum aus der Semiordinate PM in die Differential der Abscisse Pp. Tab. V. Fig. 46.

Der 1. Zusatz.

438. Derowegen wenn die Semiordinate PM $= y$/ AP $= x$/ so ist Pp $= dx$ und das Rectangulum PMRP $= ydx$.

Der 2. Zusatz.

439. Weil die Semiordinaten PM und pm einander unendlich nahe sind/ so ist ihre Differentz mR in Ansehung ihrer nichts (§. 385) und daher das Rectangulum PMRp dem Trapezio PMmp gleich. Da ihr nun die Figur in unendlich solche Trapezia resolviren könnet; so ist $\int ydx$ der Inhalt der Fläche AMP.

Der 3. Zusatz.

440. Derowegen wenn ihr aus der Æquation für eine krumme Linie den Werth von y substituiret / und ihr könnet die Differential der Fläche integriren; so habet ihr die Qvadratur der Fläche gefunden.

Die 2. Aufgabe.

441. **Den Inhalt eines Triangels zu finden.**

Auflösung.

Wenn ihr die krumme Linie AM als eine

gera-

gerade ansehet/ so ist AMP ein Triangel/ und daher auch sein Element ydx. Setzet nun die Höhe des Triangels/ davon x ein Theil ist/ $= a$/ die Grundlinie/ welche mit PM oder y parallel ist/ $= b$; so ist (§. 177 Geom.) $a:b = x:y$ folgends

$$ay = bx$$

$$y = bx:a$$

$$ydx = bxdx:a$$

$$\int ydx = bx^2:2a \quad (\S. 434)$$

Wenn ihr nun den gantzen Triangel verlanget / so setzet für den Theil der Höhe x/ die gantze Höhe a und ihr findet den Inhalt $ba^2:2a = \frac{1}{2}ab$.

Anmerckung.

442. Dieses Exempel habe ich nur zu dem Ende gegeben/ damit ihr sehet / daß durch die Integral-Rechnung/ deren Gründe den Anfängern zuerst zweifelhaft scheinen/ eben das gefunden wird / was in der gemeinen Geometrie aus andern Gründen erwiesen worden.

Die 3. Aufgabe.

443. Die Parabel zu qvadriren.

Auflösung.

In der Parabel ist $ax = y^2$

$$a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$$

ydx

$$ydx = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$\int ydx = \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{(x^2 y^2)} = \tfrac{2}{3}xy.$$

Zusatz.

444. Also verhält sich der Raum in der Parabel AMP zu dem Rectangulo aus der Semiordinate PM in die Abscisse AP wie $\frac{2}{3}xy$ zu xy / das ist wie 2 zu 3.

Die 4. Aufgabe.

445. **Unendliche Parabeln auf einmal zu qvadriren.**

Auflösung.

Für unendliche Parabeln und noch andere Linien ist

$$a^m x^n = y^r$$

$$a^{m:r} x^{n:r} = y$$

$$ydx = a^{m:r} x^{n:r} dx$$

$$\int ydx = (r:,n+r)\, a^{m:r} x^{n+r,:r} = (r:,n+r)\, yx$$

Z. E. Es sey eine Parabel von dem andern Geschlechte / so ist $a^2x = y^3$ / daher $r=3$ / $n=2$ / folgends $\int ydx = \frac{3}{5}xy$.

Die 5. Aufgabe.

446. **Eine Linie zu qvadriren / in welcher $xy^3 = a^4$.**

Auf-

Auflösung.

Weil $xy^3 = a^4$

so ist $y^3 = a^4 : x = a^4 x^{-1}$

$y = a^{4:3} x^{-1:3}$

$ydx = a^{4:3} x^{-1:3} dx$

$\int ydx = \frac{3}{2} a^{4:3} x^{2:3} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 x^2}$.

Die 6. Aufgabe.

447. Die krumme Linie des Cartesii (Tom. 3. Epist. p. 219.) zu qvadriren / in welcher $b^2 : x^2 = b - x : y$.

Auflösung.

Weil $b^2 y = bx^2 - x^3$

so ist $y = (bx^2 - x^3) : b^2$

$ydx = (bx^2 dx - x^3 dx) : b^2$

$\int ydx = x^3 : 3b - x^4 : b^2$

Die 7. Aufgabe.

448. Die krumme Linie zu qvadriren / deren Æquation ist $x^5 + ax^4 + a^2 x^3 + a^3 x^2 + a^5 = a^4 y$.

Auflösung.

Weil $y = x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : + a$

so ist $ydx = (x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a) dx$

$\int ydx$

$\int ydx = x^6 : 6a^4 + x^5 : 5a^3 + x^4 : 4a^2 + x^3 : 3a + ax.$

Die 8. Aufgabe.

449. Eine krumme Linie zu qvadriren/ deren Æquation $y^2 = x^4 + a^2x^2$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^4 + a^2 x^2$

so ist $y = \sqrt{(x^4 + a^2x^2)} = x\sqrt{(x^2 + a^2)}$

$ydx = xdx\sqrt{(x^2 + a^2)}$

Damit dieses Element zum integriren geschickt werde/ setzet

$x^2 + a^2 = v^2$

so ist $2xdx = 2vdv$

$xdx\sqrt{(a^2 + x^2)} = v^2dv$

$\int xdx\sqrt{(x^2 + a^2)} = \frac{1}{3}v^3 = \frac{1}{3}(x^2 + a^2)\sqrt{(x^2 + a^2)}$

Die 9. Aufgabe.

450. Eine krumme Linie zu qvadriren/ deren Æquation $y^2 = x^3 + ax^2$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^3 + axx$

so ist $y = x\sqrt{(x + a)}$

$ydx = xdx\sqrt{(x + a)}$

Damit dieses Element zum integriren geschickt werde/ setzet

$x+a = v^2$

so ist $x = v^2 - a$

$dx = 2vdv$

$xdx\sqrt{(x+a)} = 2v^4dv - 2av^2dv$

$\int xdx\sqrt{(x+a)} = \frac{2}{5}v^5 - \frac{2}{3}av^3 = (\frac{2}{5}(xx+ax+aa) - \frac{2}{3}(ax-aa))\sqrt{(x+a)} = (\frac{6}{15}(xx+ax+aa) - \frac{10}{15}(ax-aa))\sqrt{(x+a)} = (6x^2+2ax-4aa)\sqrt{(x+a)}:15.$

Die 10. Aufgabe.

451. Eine krumme Linie zu qvadriren, in welcher $y^2 = x^2:(x+a)$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^2:(x+a)$

so ist $y = x:\sqrt{(x+a)}$

$ydx = xdx:\sqrt{(x+a)}$

Setzet $\sqrt{(x+a)} = v$

so ist $x+a = v^2$

$x = v^2 - a$

$dx = 2vdv$

$xdx:\sqrt{(x+a)} = 2v^3dv - 2avdv):v$

das

Das ist $= 2v^3dv - 2adv$

$\int x dx : V(x + a) = \frac{2}{3}v^3 - 2av = (\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}a - 2a)V(x + a) = (\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}a)V(x + a) = V(4x^3 - 12ax^2 + 16a^3, : 9) = \frac{2}{3}V(x^3 - 3axx + 4a^3)$.

Die 11. Aufgabe.

452. Die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten zu qvadriren.

Auflösung.

Für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist.

$$a^2 = by + xy \quad (\S.\ 268)$$

daher $a^2 : (b + x) = y$

$$ydx = a^2dx : (b + x)$$

Damit dieses Element zum integriren geschickt werde/ so dividiret in der That

$$b + x \quad a^2 \left(\frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4} \right. \&c.$$

$$a^2 + a^2x : b$$

$$-a^2x : b$$

$$b + x \quad -a^2x : b - a^2x^2 : b^2$$

$$+a^2x^2 : b^2$$

$$b + x \quad + a^2x^2 : b^2 + a^2x^3 : b^3$$

$$-a^2x^3 : b^3$$

$$b + x$$

Denn ist $a^2dx:(b+x) = \frac{a^2dx}{b} - \frac{a^2xdx}{b^2}$

$+ \frac{a^2x^2dx}{b^3} - \frac{a^2x^3dx}{b^4}$ u. s. w. unendlich fort.

Folgends habet ihr $\int ydx = \frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2}$

$+ \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4}$ u. s. w. unendlich fort.

Anmerckung.

453. Diese Qvadratur der Hyperbel hat zu erst Nic. Mercator in seiner Logarithmotechnia gegeben/ welcher die unendlichen Reihen zu Qvadrirung der Figuren zu erst gebrauchet/ die man nicht accurat qvadriren kan.

Die 12. Aufgabe.

454. Den Circul zu qvadriren.

Auflösung.

Die Æquation für den Circul ist

$$y^2 = a^2 - x^2 \quad (\S.190)$$

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$ydx = dx\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

Ziehet aus $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ die Wurtzel/ so findet ihr (§. 93) $ydx = adx - \frac{x^2dx}{2a} - \frac{x^4dx}{8a^3} - \frac{x^6dx}{16a^5}$ -

$-\frac{5x^8 dx}{128a^7}$ u. s. w. unendlich fort/ des Integral

$ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ u. s. w. Tab. I. Fig. 4.

unendlich fort den Theil des Circuls DCPM ausdrucket.

Wenn ihr für x den halben Diameter a setzet/ so kommet der Werth des Qvadrantens $a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{40} - \frac{5a^2}{112} - \frac{5a^2}{1152}$ u. s. w. Setzet $a = \frac{1}{2}$/ so ist $a^2 = \frac{1}{4}$/ und demnach der gantze Circul $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152}$ u. s. w. unendlich fort.

Anders.

Es sey die Tangens des halben Bogens CB $= x$/ der halbe Diameter BA $= a$/ so ist die Tangens des doppelten Bogens BD $= 2aax : (aa - xx)$ (§. 171) folgends DA $= (a^3 + ax^2) : (aa - xx)$ (§. 167 Geom.) daher DE $= 2ax^2 : (aa - xx)$. Nun ist (§. 177 Geom.) DA : DB $=$ GA : GH/ darumb findet ihr GH $= 2a^2x : (a^2 + x^2)$ und ferner AH $= (a^3 - ax^2) : (aa + xx)$ (§. 167 Geom.)/ endlich BH $= 2ax^2 : (aa + xx)$. Wenn ihr die beyden Differential-Grössen GH und BH nemlich $(2a^4dx - 2a^2x^2dx) : (a^2 + x^2)^2$ und $4a^3xdx : (a^2 + x^2)^2$ Qvadrate $(4a^8dx^2 - 8a^6$ Tab. I. Fig. 11.

$x^2 dx^2 + 4a^4 x^4 dx^2) : (a^2 + x^2)^4$ und $16a^6 x^2 dx^2 : (a^2 + x^2)^4$ zusammen setzet/ und aus der Summe $(4a^8 dx^2 + 8a^6 x^2 dx^2 + 4a^4 x^4 dx^2) : (a^2 + x^2)^4$ die Quadrat-Wurtzel $(2a^4 dx + 2a^2 x^2 dx) : (a^2 + x^2)^2 = 2a^2 dx : (a^2 + x^2)$ ausziehet; so habet ihr die Differential des Bogens CB. Multipliciret diese in den halben Radium oder $\frac{1}{2}a$; so kommet das Element des Sectoris BCA (§. 166) heraus $(a^3 dx) : a^2 + x^2$. Setzet $a = 1$; so ist das Element $dx : (1 + x^2)$. Nun findet ihr durch die gemeine Division wie in der vorhergehenden Aufgabe (§. 452) $1 : (1 + x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$ u. s. w. unendlich fort/ und folgends $\int dx : (1 + x^2) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11}$ u. s. w. unendlich fort. Diese unendliche Reihe exprimiret den Sectorem, dessen halben Bogens Tang. x ist. Nun ist die Tang. des halben Quadrantens dem Radio gleich. Derowegen wenn ihr $x = 1$ setzet/ so ist $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ u. s. w. unendlich fort der Inhalt des Quadrantens. Nehmet ihr endlich den Diameter des Circuls 1 an; so ist eben selbige unendliche Reihe der Inhalt des gantzen Circuls.

Anmerckung.

455. Die erste Reihe für den Circul hat der Herr *Newton*; die andere der Herr von Leibnitz zu erst gefunden.

Die

Die 13. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 19.

456. **Die Ellipsin zu qvadriren.**

Auflösung.

Es sey $Ac = a$ / $DC = b$ / $PC = x$ / so ist $AP = a - x$ / $PB = a + x$ / und aus der Natur der Ellipsis

$$AP \cdot PB : (AC)^2 = (PM)^2 : (CD)^2 \quad (\S.\ 236)$$
$$aa - xx \quad aa \quad yy \quad bb$$

$$aayy = bb(aa - xx)$$

$$y = b\sqrt{(aa - xx)} : a$$

$$ydx = bdx\sqrt{(aa - xx)} : a$$

Nun ist $\sqrt{(aa - xx)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ u. s. w. unendlich fort (§. 93).

Derowegen ist $bdx\sqrt{(aa - xx)} : a = bdx - \frac{bx^2dx}{2a^2} - \frac{bx^4dx}{8a^4} - \frac{bx^6dx}{16a^6} - \frac{5bx^8dx}{28a^8}$ u. s. w. unendlich fort. Folgends ist $\int ydx = bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$ u. s. w. unendlich fort.

Wenn ihr für x die halbe Axe a setzet / so

bekommet ihr für den Qvadranten der Ellipsis $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab - \frac{1}{112}ab - \frac{5}{1152}ab$ u. s. w. unendlich fort, und also für die gantze Ellipsin eben dieselbe Reihe, wenn ihr *a* für die gantze grosse und *b* für die gantze kleine Axe annehmet.

Der 1. Zusatz.

457. Wenn ihr $\sqrt{ab} = 1$ setzet, so kommet die Reihe für den Circul $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152}$ u. s. w. heraus (§. 454.). Derowegen ist die Ellipsis einem Circul gleich, dessen Diameter die mittlere Proportional-Linie ist zwischen seiner kleinen und grossen Axe und also verhält sich die Ellipsis zu dem Circul wie die kleine Axe zu der grossen.

Der 2. Zusatz.

458. Also dependiret die Qvadratur der Ellipsis von der Qvadratur des Circuls.

Die 1. Anmerckung.

459. Die Qvadratur des Circuls, der Ellipsis und Hyperbel hat noch niemand durch einen endlichen Werth gegeben.

Die 2. Anmerckung.

Tab. VI. Fig. 51. 460. Aus der gefundenen Qvadratur der Ellipsis lässet sich nun ferner der Lehrsatz erweisen, den wir in der Astronomie (§. 447) angenommen, daß nemlich der Sector des Circuls KAP sich zu dem Sectore CAP verhalte wie der Circul zu der Ellipsi. Denn es ist klahr, daß CRP sich zu KRP verhalte, wie der Circul zur Ellipsi; Die Triangel aber

CAR und KAR verhalten sich wie CL zu KL (§. 172 Geom.) oder wie RE zu CR / folgends wie die Ellipsis zu dem Circul (§. 457). Folgends ist KAR + KRP zu CAR + CRP wie der Circul zu der Ellipsi.

Die 3. Anmerckung.

461. Daß aber LC : LK = RE : DR lässet sich leicht erweisen. Denn vermöge der gegenwärtigen Aufgabe ist $LC = b\sqrt{(aa-xx)} : a$ und $LK = \sqrt{(aa-xx)}$. Daher $LC : LK = b\sqrt{(aa-xx)} : a\sqrt{(aa-xx)} = b : a = RE : DR$.

Die 14. Aufgabe.

462. **Den Raum PXNM zwischen der Logarithmischen Linie MN und ihrer Axe PX zu finden.** Tab. V. Fig. 51.

Auflösung.

Es sey $PM = y$ $Pp = dx$ / die Subtangens $= a$ (§. 413) / so ist $ydx : dy = a$.

$$ydx = ady$$

$$\int ydx = ay$$

Der 1. Zusatz.

463. Setzet $QS = z$ / so ist $QXNS = az$ / folgends $PQSM = ay - az = a(y-z)$ das ist / dem Rectangulo aus der Subtangente in die Differentz der Semiordinaten.

Der 2. Zusatz.

464. Derowegen verhalten sich die Räume zwischen zweyen Semiordinaten wie die Differentzen der Semiordinaten.

Die 15. Aufgabe.

Tab. V. Fig. 48. 465. Die Spiral-Linie zu qvadriren.

Auflösung.

Es sey alles/ wie in der 6 Aufgabe (§. 404) so ist EG $= ydx:a$/ folgends der kleine Sector EAG oder das Element der Fläche $y^2dx:2a$. Nun ist für die Spiral-Linie (§. 272).

$$ax = by$$

$$a^2x^2:b^2 = y^2$$

$$y^2dx:2a = ax^2dx:2bb$$

$$\int y^2dx:2a = ax^3:6bb$$

Wenn ihr für x die gantze Peripherie b setzet/ so kommet für den Raum/ den die gantze Spiral-Linie einschliesset/ $\frac{1}{6}ab$.

Der 1. Zusatz.

566. Da nun der umbschriebene Circul $\frac{1}{2}ab$ ist / so verhält sich die Spiral-Fläche zu ihm wie $\frac{1}{2}ab$ zu $\frac{1}{6}ab$/ das ist/ wie 2 zu 6 oder wie 1 zu 3.

Der 2. Zusatz.

467. Für unendliche Spiral-Linien ist

$$a^mx^n = b^ny^m \quad (§. 273)$$

$$ab^{n:m} : b^{n:m} = y$$

$$a^2x^{2n:m} : b^{2n:m} = y^2$$

$$\int y^2dx:2a = max^{2n+m:m} : (4n+2m)\, b^{2n:m}$$

Wenn

Wenn ihr nun für x die gantze Peripherie b setzet/ so bekommet ihr $mab^{2n+m,m}:(4n+2m)\,a^{2n:m}=mab:(4n+2m)$.

Der 3. Zusatz.

468. Dannenhero verhält sich überhaupt die Spiral-Fläche zu dem umbschriebenen Circul wie $mab:(4n+2m)$ zu $\frac{1}{2}ab$/ das ist/ wie $2m$ zu $4n+2m$/ oder wie m zu $2n+m$.

Der 4. Zusatz.

469. Setzet/ daß der Bogen BC sich zu FC verhalten solle/ wie die Abscisse in einer Algebraischen Linie zu ihrer Semiordinate.

Und es sey der Bogen BC $=x$/ AE $=y$/ AC $=r$/ so ist FC $=r-y$/ CD $=dx$ und

$$AC : CD = AE : EG$$
$$r \quad dx \quad y \quad ydx:r$$

folgends das Element oder der Sector AEG $\frac{1}{2}y^2dx:r$. Setzet nun es sey BC die Abscisse/ EC die Semiordinate einer Parabel/ so ist

$$ax=r^2-2ry+yy$$

$$dx=(2ydy-2rdy):a$$

$$y^2dx:r=(y^3dy-ry^2dy):ar$$

$$\int y^2dx:r=y^4:4ar-y^3:3a$$

Der 5. Zusatz.

470. Ihr könnet auch den Raum BFC

finden/ wenn ihr das Element GDCE suchet/ welches ihr findet/ wenn ihr CD+EG mit $\frac{1}{2}$ FC multipliciret / weil ihr es als ein Trapezium ansehen könnet/ dessen bases CD und EG parallel sind. Nun ist CD+EG = $dx + ydx : r$ und $\frac{1}{2}$ FC = $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}y$. Derowegen das verlangte Element $(y^2dx - y^2dx) : 2r$. Nehmet nun wie in dem vorigen Exempel (§. 469) $dx = (2ydy - 2rdy) : ar$/ so ist das besondere Element $(ry^2dy + r^2ydy - y^3dy - r^3dy) : ar$/ dessen Integral $y^3 : 3a + ry^2 : 2a - y^4 : 4ar - r^2y : a$ den verlangten Raum giebet.

Die 16. Aufgabe.

Tab. V. Fig. 46. 471. **Die Fläche eines jeden Cörpers zu finden/ der sich generiret/ indem eine krumme Linie umb ihre Axe beweget wird.**

Auflösung.

Setzet die Verhältnis des halben Diameters zu der Peripherie = $r : c$/ die Absciße AP = x/ die Semiordinate PM = y/ so ist Pp = dx/ mR = dy/ Mm = $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (§. 167 Geom.) und die Peripherie/ welche mit PM beschrieben wird/ = $cy : r$. Daher das Element der Fläche $cy\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r$. Wenn ihr nun für dx^2 seinen Werth aus der gegebenen Æquation für die krumme Linie setzet/ und das Element hernach integriret; so kommet der Inhalt eines Stückes von der verlangten Fläche heraus.

Der

Der 1. Zusatz.

472. Es sey MP ein Triangel/ dessen Höhe AD = *b* / die Grundlinie = *r* / so ist xy = *rx* (§. 177 Geom. & §. 126 Algebr.) und dannenhero

$$ady : r = dx$$

$$a^2dy^2 : r^2 = dx^2$$

$$cy\sqrt{(dx^2+dy^2)} : r = cy\sqrt{(a^2dy^2+r^2dy^2)} : r^2$$

$$cy\sqrt{(dx^2+dy^2)} : r = cydy\sqrt{(a^2+r^2)} : 2r^2$$

$$\int cy\sqrt{(dx^2+dy^2)} : r = cy^2(a^2+r^2) : 2r^2$$

Setzet für y die Grundlinie *r*; so kommet die Fläche des Coni heraus $\frac{1}{2}c\sqrt{(r^2+a^2)}$. Da nun $\sqrt{(r^2+a^2)}$ seine Seite ist; so sehet ihr/ daß die Kegel-Fläche einem Triangel gleich sey/ dessen Grundlinie die Peripherie der Grund-Fläche des Kegels und die Höhe seiner Seite gleich ist.

Der 2. Zusatz.

473. Wenn ihr für die beschreibende Linie einen halben Circul annehmet/ so findet ihr die Kugel-Fläche. Da nun im Circul

$$2rx - xx = y^2$$

so ist $$2rdx - 2xdx = 2ydy$$

$$(2rdx - 2xdx) : 2y = dy$$

$$(r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2)y2 = dy^2$$

$$cy\sqrt{}\, dx^2 + dy^2) : r = cy\sqrt{}\,(dx^2 + (r^2dx^2 - rdx^2 - 2rx^2dx^2 + x^2dx^2) :, 2rx - xx) : r = cy\sqrt{}\,(2rxdx^2 - x^2dx^2 + r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2d^2, :, 2rx - xx) : r = cy\sqrt{}\,(r^2dx^2 ; y^2) : r = cyrd) : ry = cdx$$

$$\int cdx = cx$$

Setzet für x/ den Diameter $2r$/ so ist die gantze Kugel-Fläche $2cr$.

Der 3. Zusatz.

474. Da nun die Fläche des grösten Circuls $\frac{1}{2}cr$; so ist die Fläche der Kugel viermal so groß als ihr gröster Circul. Hingegen je des Stücke der Kugel-Fläche verhält sich zu der gantzen wie cx zu $2cr$/ das ist/ wie x zu $2r$/ oder die Höhe des Stückes der Kugel zu dem gantzen Diameter.

Der 4. Zusatz.

475. Es sey die beschreibende Linie eine Parabel/ so findet ihr die Fläche eines Parabolischen After-Kegels. Da nun in der Parabel

$$adx = 2ydy$$

so ist $dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$

$$cy\sqrt{}(dx^2 + dy^2) : r = cy\,(4y^2dy^2 + a^2dy^2, : a^2) : r = cydy\sqrt{}(yy + aa) : r.$$

Se-

Setzet $\sqrt{(yy+aa)} = v$

so ist $yy+aa = v^2$

$2ydy = 2vdv$

$cydy\sqrt{(yy+aa)}:r = cv^2dv:r$

$\int cv^2dv:r = cv^3:3r = (cyy+caa)\sqrt{(yy+aa)}:3r$

Setzet *r* für *y*/ so habet ihr die Fläche des ganzen After-Kegels $(crr+caa)\sqrt{(rr+aa)}:3r$.

Anmerckung.

476. Ihr wißet aus dem Differentiiren/ daß $\int dx = x$/ oder auch $x+a$. Derowegen muß man in einigen Fällen zu der gefundenen Integral noch etwas hinzu setzen/ wenn man sie gnau haben wil. Hierzu aber giebet man folgende Regel: Setzet die gefundene Integral $= 0$/ so könnet ihr daraus finden/ ob die Grösse/ so man hinzu setzen sol/ das Zeichen + oder — haben muß. Setzet ferner die undeterminirte Grösse in der Integral $= 0$/ so findet ihr daraus den Werth der determinirten Grösse/die noch beyzufügen ist. Z. E. Setzet in der 9. Anfgabe (§ 450)

$$(6x^2+2ax-4aa)\sqrt{(x+a)}:15 = 0$$

so ist $6x^2 = -2ax$

$6x = -2a$

Und also muß noch von der gefundenen Integral etwas subtrahiret werden/damit der Werth gnaue heraus kommet.

Setzet ferner $x = 0$

so

so ist $(6x^2+2ax-4aa)\sqrt{(x+a)}:15 = -4a^2\sqrt{a}:15$
Demnach habet ihr $-4a^2\sqrt{a}:15$ noch zugegebener Integral beyzufügen.

Eben so könnet ihr in anderen Fällen verfahren.

Von der Rectification der krummen Linien.

Die 4. Erklährung.

477. **Eine krumme Linie rectificiren heisset so viel als die Länge derselben finden.**

Der 1. Zusatz.

478. Wenn die beyden Semiordinaten PM und pm einander unendlich nahe sind / so ist der Bogen Mm das Element des Bogens AM / das ist / $(\sqrt{dx^2+dy^2})$

Tab. V. Fig. 46.

Der 2. Zusatz.

479. Derowegen wenn ihr vor dx^2 oder dy^2 den Werth aus der Natur der krummen Linie setzet / und das besondere Element integriret; so habet ihr die krumme Linie oder ihren Bogen AM rectificiret.

Der 3. Zusatz.

480. Ihr könnet auch das Element Mm finden / wenn ihr setzet: BM : TM = dy : Mm.

Die 17. Aufgabe.

481. **Die Parabel zu rectificiren.**

Auf-

Auflösung.

In der Parabel ist $ax = y^2$

$$adx = 2ydy$$

$$a^2dx^2 = 4y^2dy^2$$

$$dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$$

$$\sqrt{}(dx^2 + dy^2) = \sqrt{}(dy^2 + 4y^2dy^2 : a^2)$$

Das ist $= dy\sqrt{}(aa + 4y^2) : a$

Weil $\sqrt{}(aa + 4y^2)$ die Semiordinate einer gleichseitigen Hyperbel exprimiret; so ist dieses Element zugleich das Element einer gleichseitigen Hyperbel. Und demnach dependiret die Rectification der Parabel von der Quadratur der Hyperbel. Damit ihr nun dieses Element integriren könnet, so ziehet (§. 91) die Wurtzel aus $\sqrt{}(aa + 4y^2)$. Es ist nemlich

$n = 2$, $m = 1$, $P = a^2$ $Q = 4y^2 : a^2$

$P^{m:n} = +a = A$

$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2} a . 4y^2 : a^2 = +2y^2 : a = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{4} a . 4y^2 : a^2 = -2y^4 : a^3 = C$$

$$\frac{m\cdot 2n}{3n} CQ = -\tfrac{3}{6} . -2y^4 : a^3 . 4y^2 : a^2 = +4y^6 : a^5 = D.$$

$$\frac{m-3n}{4m} DQ = -\tfrac{5}{8} . 4y^6 : a^2 . 4y^2 : a^2 = -10y^8 : a^7$$

u. s. w. unendlich fort. Dem-

Demnach ist $\sqrt{(aa+4y^2)} = a + \frac{2y^2}{a} - \frac{2y^4}{a^3} + \frac{4y^6}{a^5} - \frac{10y}{a^5}$ &c. und daher $dy\sqrt{(aa+4y^2)}:a = ay + \frac{2y^2dy}{a^2} - \frac{2y^4dy}{a} + \frac{4y^6dy}{a^6} - \frac{10y^8}{a^8}dy$ &c. Deren Integral $xy + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8}$ &c. Die Länge des Bogens exprimiret.

Die 18. Aufgabe.

482. **Die Parabel zu rectificiren/ in welcher** $ax^2 = y^3$.

Auflösung.

Weil $ax^2 = y^3$

So ist $2axdx = 3y^2dy$

$4a^2x^2dx^2 = 9y^4dy^2$

$dx^2 = 9y^4dy^2 : 4a^2x^2 = 9ydy^2 : 4a$

$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{(9ydy^2 + 4ady^2, : 4a)} = dy\sqrt{(9y+4a, : 4a)}$

Setzet $\sqrt{(9y+4a, : 4a)} = v$

so ist $9y + 4a = 4av^2$

9dy

$$9dy = 8avdv$$

$$dy\sqrt{(9y+4a,:4a)} = \frac{8}{9}av^2dv$$

$\int dy\sqrt{(9y+4a,:4a)} = \frac{8}{27}av^3 = \frac{8}{27}(9y+4,:4)\sqrt{(9y+4,:4)} = \frac{2}{27}(9y+4)\frac{1}{2}\sqrt{(9y+4)} = \frac{1}{27}(9y+4)\sqrt{(9y+4)} - \frac{8}{27}$ (§. 476) wenn $a = 1$.

Die 19. Aufgabe.

483. **Unendliche Parabeln zu rectificiren.**

Auflösung.

Für unendliche Parabeln ist

$$ny^n = a^{n-1}x = x, \text{ wenn } a=1.$$

$$ny^{n-1}dy = dx$$

$$n^2y^{2n-2}dy^2 = dx^2$$

$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{(n^2y^{2n-2}dy^2+dy^2)} = dy\sqrt{(n^2y^{2n-2}+1)}$

Ziehet nun aus $\sqrt{(1+n^2y^{2n-2})}$ die Wurtzel (§. 91), und setzet der Kürtze halber $2n-2 = r$ so ist in dem Nevvtonischen Lehrsatze $m=1$, $n=2$, $P=1$, $Q=n^2y^r$

$P^{m:n} = 1 = A$

$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2}n^2y^r = B$

$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{1}{4}.\frac{1}{2}n^2y^r, n^2y^r = -\frac{1}{8}n^4y^{2r} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} \cdot -\frac{1}{8} n^4 y^{2r} . n^2 y^r = + \frac{1}{16} n^6 y^{3r} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{16} n^4 y^{3r} . n^2 y^r = -\frac{5}{128} n^8 y^{4r}$ &c.

Demnach ist $dy \sqrt{(1 + n y^{2n-2})} = dy + \frac{1}{2} n^2 y^r dy - \frac{1}{8} n^4 y^{2r} dy + \frac{1}{16} n^6 y^{3r} dy - \frac{5}{128} n^8 y^{4r} dy$ u. s. w. unendlich fort / dessen Integral

$y + \frac{n^2 y^{r+1}}{2(r+1)} - \frac{n^4 y^{2r+1}}{8(2r+1)} + \frac{n^6 y^{3r+1}}{16(3r+1)} - \frac{5n^8 y^{4r+1}}{128(4r+1)}$

u. s. w. unendlich fort die Länge unendlicher Parabeln ausdrucket. Wollet ihr für r seinen Werth $2n-2$ in die Stelle setzen / so bekommet ihr $y + \frac{n^2 y^{2n-1}}{2(2n-1)} - \frac{n^4 y^{4n-3}}{8(4n-3)} \frac{n^6 y^{6n-5}}{16(6n-5)}$

$- \frac{5n^8 y^{8n-7}}{128(8n-7)}$ &c.

Es sey z. E. $n = 2$ / so bekommet ihr $y + \frac{4y^3}{6} - \frac{16y^5}{8.5} + \frac{4.16y^7}{16.7}$ das ist / $y + \frac{2y^3}{3} - \frac{2y^5}{5} + \frac{4y^7}{5}$ &c.

für die Apollonische Parabel / welche Reihe mit der obengefundenen überein komet / wenn ihr $a = 1$ setzet.

Die 20. Aufgabe.

484. Aus der gegebenen Tangente eines Circul-Bogens den Bogen zu finden.

Auflösung.

Es sye die Tangens KB $= x$ / BC $= 1$ / so ist AK $= dx$ / KG $= \sqrt{(1+xx)}$ / AL $= xdx : \sqrt{(1+xx)}$ wenn nemlich KC und AC einander unendlich nahe sind. Da nun bey L und B rechte Winckel sind (§. 429) und BKC = KAL / weil KCL unendlich kleine ist; so ist auch BCK = AKL (§. 99 Geom.). Tab. I. Fig. 4.

folgends KC : BC = AK : KL (§. 182 Geom.)
$\sqrt{(1+x^2)}$ 1 dx $dx : \sqrt{(1+x^2)}$

Ferner KC : KL = IC : ID (§. 45 Geom.)
$\sqrt{(1+x^2)}$ $dx : \sqrt{(1+x^2)}$ 1 $dx : (1+x^2)$

Wenn ihr nun 1 durch $1+x^2$ würcklich dividiret / so bekommt ihr für das Element DE des Bogens BI $dx - x^2dx + x^4dx + x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ u. s. w. unendlich fort / dessen Integral $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ u. s. w. unendlich fort den Bogen BI exprimiret / dessen Tangens BK $= x$.

Der 1. Zusatz.

485. Die Tangens des Bogens von 45° ist dem Radio BC gleich / und also wird $x = 1$ / folgends der Bogen von 45° oder der halbe Qvadrant $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. Setzet ihr aber den gantzen Diameter eines / so ist der Qvadrante $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c.

Der 2 Zusatz.

486. Derowegen verhält sich das Qvadrat des Diameters zu der Circul-Fläche wie der

Diameter zu dem Qvadranten von der Peripherie.

Die 1. Anmerckung.

487. Ihr hättet eben diese Methode brauchen können den Circul zu qvadriren.

Die 2. Anmerckung.

488. Wenn ihr aus dem gegebenen Bogen die Tangentem finden wollet/ dörfet ihr nur aus der Reihe/ die für den Bogen gefunden worden/ eine andere für die Tangentem suchen. Daher ich vorher überhaupt zu zeigen nöthig habe/ wenn $u = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 cx^5$ &c. Wie der Werth von x in einer unendlichen Reihe durch u exprimiret werde.

Die 21. Aufgabe.

489. **Wenn der Werth einer veränderlichen Grösse u durch eine unendliche Reihe aus den Dignitäten einer andern veränderlichen Grösse x ausgedrucket ist/ den Werth von x durch seine unendliche Reihe aus den Dignitäten von u auszudrucken.**

Auflösung.

Es sey Z. E. $u = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + cx^5$ &c. Setzet $x = hu + iu^2 + ku^3 + lu^4 + mu^5 + nu^6$ &c. so ist

$$\begin{array}{llllll} x^2 = h^2u^2 & + 2hiu^3 & + i^2u^4 & + 2hlu^5 & + k^2u^6 \\ & & + 2hk & + 2ik & + 2hm \\ & & & & + 2il \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} x^3 = h^3u^3 & + 3h^2iu^4 & + hi^2u^5 & + 3h^2lu^6 \text{ \&c.} \\ & & + 3l^2k & + 6hik \\ & & & + i^3 \end{array}$$

$x^4 = h^4x^4 + 4h^3ix^5 + 6h^2i^2u^6$. &c.
$+ 4h^3k$

$x^5 = h^5a^5 + 5h^4iu^6$ &c.

$x^6 = h^6u^6$ &c.

Setzet in der Æquation $o = -u + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ &c. die gefundenenen Werthe von x/ x^2/ x^3 &c. so bekommet ihr

$-u$	$=$	$-u$					
$+ax$	$=$	$+ahu$	$+aiu^2$	$+aku^3$	$+alu^4$	$+amu^5$	$+anu^6$
$+bx^2$	$=$		$+bh^2$..	$+2bhi$..	$+bi^2$..	$+2bhl$..	$+bk^2$..
					$+2bhk$..	$+2bik$..	$+2bhm$..
							$+2il$..
$+cx^3$	$=$			$+ch^3$..	$+3ch^2i$..	$+2chi^2$..	$+3ch^2l$..
						$+3cl^2k$..	$+6chik$..
							$+ci^3$..
$+dx^4$	$=$				$+dh^4$..	$+4dh^3i$..	$+6dh^2i^2$..
							$+4dh^3k$..
$+ex^5$	$=$					$+eh^5$..	$+5eh^4i$..
$+fx^6$	$=$						$+fh^6$..

Setzet in der neuen Æquation jedes gefundenes Glied $=0$, so ist

$$ah-1=0 \qquad ai+bh^2=0 \qquad ak+2bhi+ch^3=0$$

$$h=1:a \qquad i=-bh^2:a \qquad k=(-2bhi-ch^3):a$$

$$i=-b:a^3 \qquad k=(+2b^2-ac):a^5$$

$$al+bi^2+2bhk+3ch^2i+dh^4=0$$

$$l=(bi^2-2bhk-3chi-dh^4):a$$

$$l=-b^3:a^7-4b:a^7+2bc:a^6+3bc:a^6-d:a^5$$

$$l=(5abc-5b^3-a^2d):a^7$$

Eben so findet ihr

$m=14b^4+6a^2bd-21ab^2c+3a^2c^2-a^3e):a^9$

$n=(-42b^5+84ab^3c-28a^2bc-28a^2b^2d+7a^3cd+7a^3be-a^4f):a^{11}$ u. s. w.

Setzet nun endlich in der angenommenen Æquation $x=hu+iu^2+ku^3+lu^4+mu^5+nu^6$ &c. die gefundenen Werthe von $h.\ i.\ k.\ l.\ m.\ n$; so kommet die verlangte Reihe $x=\frac{u}{a}-\frac{bu^2}{a^3}+\frac{2bb-ac}{a^5}u^3+\frac{5abc-5b^3+aad}{a^7}u^4$ u. s. w. heraus.

Die 1. Anmerckung.

490. Auf gleiche Art könnet ihr in allen andern Fällen verfahren. Doch wenn die Exponenten der Dignitäten in einer andern Arithmetischen Proportion

tion fortgehen als in der natürlichen Ordnung der Zahlen; dörfet ihr die Glieder/so fehlen / nur für nichts halten / und dannenhero auch an den übrigen alles weglassen / was durch die Grössen multipliciret ist / so sie multipliciren. Z. E. Es sey $v = ax + cx^3 + ex^5$ &c. so ist $b = 0$, $d = 0$ und demnach $x = \frac{u}{a} - \frac{acu^3}{a^5}$

$+ \frac{3a^2c^2 - a^3eu^5}{a^9}$ &c.

Die 2. Anmerckung.

491. Ihr könnet zwar durch die oben (§. 87) gefundene Regel eine jede vorgegebene unendliche Reihe zu einer jeden verlangten Dignität erheben; allein es ist doch rathsamer/ daß ihr die Arbeit einmal für allemal thut. Ihr werdet demnach finden/ daß $(a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 \text{ \&c.})^m = a^m + \frac{m}{1} by$

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot a^{m-1}bb \\ \quad + \frac{m}{1}\cdot a^{m-1}c \end{array}\right\} yy$$

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot a^{m-3}b^3 \\ \quad + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot a^{m-2}bc \\ \qquad + \frac{m-1}{1}\cdot a^{m-1}d \end{array}\right\} y^3$$

$$+ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot a^{m-4}b^4 \Big\}$$

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2}\, a^{m-3}b^2c \\ + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2}\, a^{m-2}cc \\ + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{1}\, a^{m-2}bd \\ + \frac{m}{1}\, a^{m-1}e \end{array}\right\} y^4$$

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5}\, a^{m-5}b^5 \\ + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{3}\, a^{m-4}b^3 \\ + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{1}\, a^{m-3}bc^2 \\ + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{1}\, a^{m-2}cd \\ + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{1}\, a^{m-1}be \\ + \frac{m}{1}\, a^{m-1}f \end{array}\right\} y^5$$

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5} \cdot \frac{m-5}{6}\, a^{m-6}b^6 \\ + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{3} \cdot \frac{m-4}{4}\, a^{m-5}b^4c \\ + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{1} \cdot \frac{m-3}{2}\, a^{m-4}b^2c^2 \\ + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}\, a^{m-3}c^3 \\ + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{4}\, a^{m-4}b^3d \end{array}\right. $$

$+$

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot a^{m-2}d^2 \\ + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot a^{m-3}bcd \\ + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot a^{m-3}b^2e \\ + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{1} \cdot a^{m-2}ce \\ + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{1} \cdot a^{m-1}bf \\ + \frac{m}{1} \cdot a^{m-1}g \end{array}\right\} y^6$$

Wenn ihr diese Reihe durch y^m multipliciret/ so bekommet ihr eine andere für $(ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + fy^6 + gy^7 \text{ \&c.})^m$ / in welcher die Unciæ wie in der vorigen bleiben/ hingegen die Dignitäten sind $y^m + y^{m+1} + y^{m+2} + y^{m+3} + y^{m+4} + y^{m+5}$ &c.

Die 3. Anmerckung.

492. Wenn ihr nun eine unendliche Reihe zu der andern Dignität erheben wollet/ so setzet ihr nur au stat m 2/ für die dritte 3/ für die vierdte 4 u. s. w. ingleichen für $a. b. c. d. e. f. g$ und so weiter die anderen Buchstaben/ durch welche in der gegebenen Reihe y multipliciret ist. Z. E. Wenn ihr $hx + ix^2 + kx^3 + lx^4 + mx^5 + nx^6$ &c. Zu der anderen Dignität erheben wollet/ so ist $m = 2$/ $a = h$/ $b = i$/ $c = k$/ $d = l$/ $e = m$/ $f = n$ &c.

&c. und demnach bekommet ihr für die andere Dignität

$$h^2x^2 + 2hix^3 + i^2x^4 + 2ikx^5$$
$$\qquad + 2hkx^4 + 2hlx^5 \ \&c.$$

Die 22. Aufgabe.

493. **Aus dem gegebenen Bogen eines Circuls/ der kleiner ist als ein Qvadrant/ die Tangentem zufinden.**

Auflösung.

Wenn die Tangens x ist/ so ist der Bogen $v = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$ &c. (§. 484).

Suchet nun den Werth x durch v (§. 489). Vergleichet nemlich eure Æquation $u = x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$ &c. mit dieser $u = ax + cx^3 + ex^5 + gx^7$ &c. so ist $a = 1$/ $c = -\frac{1}{3}$/ $e = +\frac{1}{5}$/ $g = -\frac{1}{7}$.

Setzet diese Werthe in ihre gehörige Stellen der Æquation $x = \frac{v}{a} - \frac{acv^3}{a^5} + \frac{3a^2c^2 - a^3ev^5}{a^9}$ &c. so bekommet ihr $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5 + \frac{17}{315}v^7 + \frac{62}{2835}v^9$ &c. welche Æquation die Tangentem durch den Bogen exprimiret.

Die 23. Aufgabe.

494. **Aus dem gegebenen Sinu eines Bogens den Bogen/ der kleiner als ein Qvadrant ist/ zu finden.**

Auf-

Auflösung.

Wenn der halbe Diameter des Circuls r/ der Sinus des Bogens der die Semiordinate y/ der Sinus versus oder die Absciſſe x ist; so ist die Æquation des Circuls

$$2rx - xx = yy$$

daher $$2rdx - 2xdx = 2ydy$$

$$dx = ydy : (r - x)$$

$$dx^2 = y^2dy^2 : (r^2 - 2rx + xx)$$

das ist $$= y^2dy^2 : (r^2 - y^2)$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(y^2dy^2 + (r^2dy^2 - y^2dy^2)) : (r^2 - y^2))} = rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)}$$

Damit dieses Element des Bogens zum integriren geschickt werde/ so ziehet aus $1 : (r^2 - y^2)$ die Wurtzel in der That (§. 87). Es ist aber $m = -1$/ $n = 2$/ $P = r^2$/ $Q = -y^2 : r^2$

$$P^{m:n} = r^{-1} = 1 : r = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = -\tfrac{1}{2} . -y^2 : r^2 = +y^2 : 2r^3 = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{3}{4} . y^2 : 2r^3 . -y^2 : r^2 = +3y^4 : 8r^5 = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{5}{6} . 3y^4 : 8r^5 . -y^2 : r^2 = +5y^6 : 16r^7 = D$$

$$\frac{m-2n}{4n} DQ = -\tfrac{7}{8} . 5y^6 : 16r^7 . -y^2 : r^2 = +35y^8 : 125r^6$$

u. s. w. unendlich fort.

Also

Also ist $rdy(r^2-y^2)^{-1:2} = dy + \frac{y^2dy}{2r^2} + \frac{3y^4dy}{8r^4} + \frac{5y^6dy}{16r^6} + \frac{35y^8dy}{128r^8}$ &c. dessen Integral $y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8}$ &c. den verlangten Bogen durch seinen Sinum ausdrucket. Wenn ihr besser sehen wollet / wie die Reihe unendlich fortgehet / so nennet das erste Glied A / das andere B / das dritte C u. s. w. so findet ihr $y + \frac{1.1.y^2}{2.3r^2}A + \frac{3.3y^2}{4.5r^2}B + \frac{5.5y^2}{6.7r^2}C + \frac{7.7y^2}{8.9r^2}D + \frac{9.9y^2}{10.11r^2}E$ &c.

Zusatz.

491. Weil der Bogen $v = y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6}$ &c. so findet ihr (§.489) wie in der 22 Aufgabe (§.493) $y = v - \frac{v^3}{6r^2} + \frac{v^5}{120r^4} + \frac{v^7}{5040r^6}$

+

$$+\frac{v^9}{26288r^8}\ \&c. = v - \frac{v^3}{1.2.3r^2} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5r^4}$$

$$-\frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7r^6} + \frac{v^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9r^9}\ \&c.$$

Das ist/ wenn ihr das erste Glied A/ das andere B/ das dritte C &c. setzet/ $y = v - \frac{v^2}{2.3r^2}$

$$A + \frac{v^2}{4.5r^2} - \frac{v^2}{6.7r^2}\ C + \frac{v^2}{8.9r^2}\ D\ \&c.$$

Die 24. Aufgabe.

496. Aus dem gegebenen Sinu verso den Bogen des Circuls zufinden.

Auflösung.

Wenn der Diameter des Circuls $2r$/ die Absciſſe oder der Sinus versus $= x$ ist/ so ist für den Circul

$$2rx - xx = yy$$

$$2rdx - 2xdx = 2ydy$$

$$(rdx - xdx) : y = dy$$

$$(r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : y^2 = dy^2$$

$$V(dx^2 + dy^2) = V(dx^2 + (r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2 dx^2) : (2rx - xx)) = V(2rxdx^2\ x^2dx^2 + r^2dx^2 - 2rx$$

$-2rxdx^2 + x^2dx^2,:,2rx-xx) = rdx : \surd(2rx - xx) = rdx(2rx-x^2)^{-1:2}$ damit dieses Element zum integriren geschickt werden, so ziehe aus $2rx-x^2$ die Wurtzel in der That, (§. 91).

Es ist aber $m = -1$, $n = 2$, $P = 2rx$, $Q = -\frac{x}{2r} = -\frac{1}{2}xr^{-1}$ und demnach

$$P^{m:n} = \surd 2r^{-1:2}x^{-\frac{1}{2}} = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\frac{1}{2}.\surd 2\, r^{-1:2}x^{-1:2}$$

$$+\frac{1}{4}\surd 2r^{3:2}x^{1:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{3}{4}.\frac{1}{4}\surd 2r^{-3:2}x^{1:2}.-\frac{1}{2}xr^{-1} =$$

$$+\frac{3\surd 2r^{-5:2}x^{3:2}}{32} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{5}{6}.\frac{3\surd 2r^{5:2}x^{3:2}}{32}-\frac{1}{2}xr^{-1} =$$

$$+\frac{15\surd 2r^{-7:2}x^{5:2}}{4} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{7}{8}.\frac{15\surd 2r^{-7:2}x^{5:2}}{384} - \frac{1}{2}xr^{-1} = +$$

$$\frac{105\surd 2r^{-9:2}x^{7:2}}{6144} \text{ \&c.}$$

Also

Also ist das Element des Bogens $\sqrt{2r^{1:2}}\, x^{-1:2}\, dx + \frac{\sqrt{2r^{-1:2}}\, x^{1:2}\, dx}{4} + \frac{3\sqrt{2}\, r^{3:2} x^{3:2}\, dx}{32} + \frac{15\sqrt{2r^{-5:2}}\, x^{5:2}\, dx}{384} + \frac{105\sqrt{2r^{-7:2}}\, x^{7:2}\, dx}{6144}$ &c. dessen Integral $2\sqrt{2r^{-1:2}}\, x^{-1:2} + \frac{2\sqrt{2r^{-1:2}}\, x^{3:2}}{12} + \frac{6\sqrt{2r^{-3:2}}\, x^{5:2}}{160} + \frac{30\sqrt{2r^{-5:2}}\, x^{7:2}}{2688} + \frac{210\sqrt{2r^{-7:2}}\, x^{9:2}}{55296}$ &c. $= 2\sqrt{2rx}\left(1 + \frac{x}{12} + \frac{3x^2}{80r} + \frac{5x^3}{896r^2} + \frac{105x^4}{55296r^3}\right) =$ (wenn ihr den Diameter $= r$ setzet) $\sqrt{rx}\left(1 + \frac{x}{6} + \frac{3x_2}{40r} + \frac{5x^3}{112r^2} + \frac{35x^4}{1152r^3}\right.$ &c.) den Bogen durch den Sinum versum exprimiret.

Zusatz.

497. Wollet ihr den Sinum versum durch den Bogen ausdrucken, so werdet ihr (§. 489) finden $x = \frac{v^2}{1.2r} - \frac{v^4}{1.2.3.4r^3} + \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6r^5}$ &c.

&c. = (wenn ihr das erste Glied A / das andere B u. s. w. setzet) $\frac{v^2}{1.2r} - \frac{v^2}{3.4r^2} A + \frac{v^2}{5.6r^2} B - \frac{v^2}{7.8r^2} C$ &c.

Von der Cubatur der Cörper.

Die 4. Erklährung.

498. **Cubiren heisset den Inhalt eines Cörpers finden.**

Der 1. Zusatz.

499. Wenn ein Cörper sich generiret in dem eine Figur sich umb ihre Axe herumb beweget / so beschreibet jede Semiordinate einen Circul und dannenhero ist das Element desselben das Product aus einem Circul / der mit der Semiordinate beschrieben wird / in die Differential der Abscisse. Wenn ihr demnach die Verhältnis des Radii zu der Peripherie setzet $r : c$ / so ist die Peripherie des gedachten Circuls $cy : r$ und der Inhalt $cy^2 : r$ (§. 163 Geom.) / folgends das Element $cy^2 dx : 2r$.

Der 2. Zusatz.

500. Wenn ihr demnach den Werth von y^2 durch x aus der Æquation für die gegebene Figur substituiret und das Element integriret; so habet ihr den verlangten Inhalt des Cörpers.

Die

Die 25. Aufgabe.

501. Den Conum zu cubiren.

Auflösung.

Weil der Conus von einem Triangel beschrieben wird (§. 33 Geom.) so habet ihr (wenn die Höhe des Triangels a, die Grund-Linie r ist

$$rx = ay$$

$$r^2x^2 : a^2 = y^2$$

$$cy^2dx : 2r = crx^2dx : 2a^2$$

$$\int cy^2dx : r = crx^3 : 6a^2$$

Wenn ihr den gantzen Kegel verlanget, so setzet a für x, und ihr findet seinen Inhalt $cra^3 : ba^2 - \frac{1}{6}cra = \frac{1}{2}cr . \frac{1}{3}a$, das ist, wenn ihr die Grundfläche $\frac{1}{2}cr$ durch den dritten Theil der Höhe $\frac{1}{3}a$ multipliciret.

Die 26. Aufgabe.

502. Die Kugel zu cubiren.

Auflösung.

Die Kugel wird von einem halben Circul beschrieben (§. 25 Geom.), in welchem

$$2rx - xx = yy$$

daher ist $cy^2dx : 2r = cxdx - cx^2dx : 2r$

$$\int cy^2dx : 2r = \frac{1}{2}crx^2 - cx^3 : 6r$$

Wenn ihr die gantze Kugel verlanget/ so setzet $2r$ oder den Diameter für x oder die Höhe des Kugel-Stückes / und ihr bekommet für ihren Inhalt $2cr^2 - cr^2 : 6 = 4cr^2 : 6 = \frac{2}{3} cr^2$.

Zusatz.

503. Der Inhalt eines umbschriebenen Cylinders/ dessen Höhe nemlich dem Diameter/ die Grund-Fläche dem grösten Circul der Kugel gleichet/ ist cr^2/ und demnach verhält er sich zur Kugel wie cr^2 zu $\frac{2}{3} cr^2$/ das ist/ wie 3 zu 2.

Die 27. Aufgabe.

504. **Einen Parabolischen After-Kegel zu cubiren.**

Auflösung.

In der Parabel ist

$$y^2 = ax$$

daher $cy^2 dx : 2r = acx dx : 2r$

$$\int cy^2 dx : 2r = acx^2 : 4r = cy^2 x : 4r$$

Wenn die Höhe des gantzen Kegels b und der halbe Diameter in der Grundfläche r ist; so ist der Inhalt desselben $bcr^2 : 4r = \frac{1}{4} bcr$.

Zusatz.

505. Da nun der umbschriebene Cylinder $\frac{1}{2} bcr$ ist/ so verhält sich dieser zu dem Parabolischen After-Kegel wie $\frac{1}{2} bcr$ zu $\frac{1}{4} bcr$/ das ist/ wie 1 zu 2.

Die

Die 28. Aufgabe.

506. Unendliche Parabolische After-Kegel auf einmal zu cubiren.

Auflösung.

Es sey der Parameter = 1, so ist für unendliche Parabeln

$$y^m = x$$

$$y = x^{1:m}$$

$$y^2 = x^{2:m}$$

$$\int cy^2dx : 2r = cx^{2:m}dx : 2r$$

$\int cy^2dx : 2r = mcx^{(2+m):m} : (4+2m)\,r = mcxy^2 : (2m+4)\,r$.

Die 29. Aufgabe.

507. Eine Elliptische After-Kugel zu cubiren.

Auflösung.

Es sey der kleine Diameter in der Ellipsi 2r, der grosse = 2a, so ist

$$yy = rr - r^2x^2 : a^2 \quad (\S.\ 237).$$

$$cy^2dx : 2r = \tfrac{1}{2}crdx - crx^2dx : 2a^2$$

$$\int cy^2dx : 2r = \tfrac{1}{2}crx - crx^3 : 6a^2.$$

Setzet für x die gantze grosse Axe 2a, so kommet der Inhalt des gantzen Cörpers $acr - \frac{2}{6}acr = \frac{2}{3}acr$.

Der 1. Zusatz.

508. Der umbschriebene Cylinder ist acr und demnach verhält er sich zu der Elliptischen After-Kugel wie acr zu $\frac{2}{3}\,acr$, das ist, wie 1 zu $\frac{2}{3}$, oder 3 zu 2.

Der 2. Zusatz.

509. Die Kugel, deren Diameter dem grossen Diameter der Ellipsis gleichet, ist $2a^3c^3 : 3r$ (§ 502). Demnach verhält sie sich zu der Elliptischen After-Kugel wie $2a^3c : 3r$ zu $\frac{2}{3}\,acr$ das ist, wie a^2 zu r^2, oder wie das Qvadrat der grossen Axe zu der kleinen.

Der 3. Zusatz.

510. Die Kugel, deren Diameter dem kleinen Diameter der Ellipsis gleichet, ist $\frac{2}{3}\,cr^2$. Derowegen verhält sie sich zu der Elliptischen After-Kugel wie $\frac{2}{3}cr^2$ zu $\frac{2}{3}\,acr$, das ist wie r zu a, oder die kleine Axe zu der grossen.

Die 30. Aufgabe.

511. **Einen Hyperbolischen After-Kegel zu cubiren.**

Auflösung.

Es sey die Zwerch-Axe $= 2a$, die kleine Axe $= 2r$, die Abscisse $= x$, die Semiordinate $= y$,

$$rr : aa = y^2 : 2ax + xx$$

$$y^2 = (2ar^2x + r^2x^2) : a^2$$

$$cy^2dx : 2r = crxdx : a + crx^2dx : 2a^2$$

$$\int cy^2dx : 2r = crx^2 : 2a + crx^3 : 6a^2$$

Setzet für x die gantze Höhe des After-Kegels b, so kommet sein Inhalt $crb^2 : 2a + crb^3 ; 6a^2$.

Die 31. Aufgabe.

512. **Den Inhalt des Cörpers zu finden, der sich generiret, in dem der Raum zwischen der Logarithmischen Linie MN und der geraden Linie PX sich umb PX herumb beweget.** Tab. V. Fig. 51.

Auflösung.

In der Logarithmischen Linie, deren Subtangens $= a$, ist

$$ydx = ady \quad (\S. 462).$$

$$dx = ady : y$$

$$cy^2dx : 2r = acy^2dy : 2ry = acydy : 2r$$

$$\int cy^2dx : 2r = acy^2 : 4r$$

Nehmet r für die letzte Semiordinate AB an, so ist der Inhalt des gantzen Cörpers $\frac{1}{4} acr$, der durch die Bewegung des unendlichen Raumes NBAX beschrieben wird.

Tab. II. Fig. 15.

Die 32. Aufgabe.

513. **Den Inhalt eines Cörpers zu finden/ der beschrieben wird/ indem sich eine halbe Parabel AMP umb ihre Semiordinate PM beweget.**

Auflösung.

In diesem Falle ist das Element gleich dem Producte aus einem Circul/ der mit MR der Differentz zwischen der Abscisse AP und der gantzen Axe AX beschrieben wird/ in die Differential der Semiordinate. Setzet nun AX $= r$/ MX $= b$/ AP $= x$/ so ist MR $= r - x$. Wenn nun die Verhältnis des Radii zur Peripherie $r : c$/ so findet ihr die Peripherie so mit MR beschrieben worden $(rc - cx) : r$/ folgends den Circul $(r^2c - 2rcx + cx^2) : 2r$. Dannenhero ist das Element $(r^2cdy - 2rcxdy + cx^2dy) : 2r$. Nun ist in der Parabel/ wenn der Parameter $= 1$/ $y^2 = x$ und $y^4 = x^2$ daher das Element $\frac{1}{2}rcdy - cy^2dy + cy^4dy : 2r$/ dessen Integral $\frac{1}{2}rcy - \frac{1}{3}cy^3 + cy^5 : 10r$ das Stücke des Cörpers exprimiret/ welches von MMR beschrieben worden.

Wenn ihr für y^2 seinen Werth x setzet/ so habet ihr für eben dasselbe Stücke $\frac{1}{2}rcy - \frac{1}{3}cxy + cx^2y : 10r$. Setzet nun ferner r für x und b für y; so bekommet ihr für den gantzen Cörper $\frac{1}{2}rcb - \frac{1}{3}crb + cr^2b : 10r = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10})bcr = \frac{(30 - 20 + 6)}{60} bcr = \frac{4}{15}bcr$.

Anmerckung.

514. Auf gleiche Weise könnet ihr den Inhalt der Cörper finden/ wenn ihr setzet/ daß sich eine Fläche umb eine andere Linie/ als z. E. umb die Tangentem oder Subnormal-Linie beweget.

Von der verkehrten Methode der Tangentium.

Die 5. Erklährung.

515. **Die verkehrte Methode der TANGENTIUM (Methodus Tangentium inversa) ist diejenige welche zeiget/ wie man aus der gegebenen Subtangente, Tangente, Normal-Linie oder Subnormal-Linie die Æquation finden kan/ welche die Natur der Linie erklähret.**

Zusatz.

516. Setzet nehmlich die gegebenen Linien ihrem Werthe gleich / darinnen die Differential-Grössen anzutreffen sind/ so bekommet ihr die Differential-Gleichung für die gesuchte Linie. Wenn ihr nun selbige integriret/ so bekommet ihr die gesuchte Æquation.

Die 33. Aufgabe.

517. **Eine krumme Linie zu finden/ deren Subtangens** $= 2yy:a$.

Auflösung.

Weil die Subtangens in einer jeden Algebraischen Linie $= ydx:dy$/ so ist

$$2y^2 : a = ydx : dy$$

$$2y^2dy = aydx$$

$$2ydy = adx$$

$$y^2 = ax$$

Welche Æquation zeiget / daß die verlangte Linie eine Parabel sey.

Anmerckung.

518. Hätte man gesagt/ die Subtangens solte $2x$ seyn (ich setze aber beständig / wie vorhin/ daß x allzeit die Abscisse / y die Semiordinate bedeute) ; so bekämet ihr $ydx = 2xdy$. Wollet ihr nun diese Æquation zum integriren geschickt machen/ so sehet ihr daß/ wenn ihr x durch y exprimiren wollet/ ihr y^2 durch eine beständige Grösse dividiren müsset/ und dannenhero für $2x$ annehmen $2y^2 : a$.

Die 34. Aufgabe.

519. **Eine krumme Linie zu finden/ deren Subnormal-Linie beständig von einer Grösse ist/ z. E. $= a$.**

Auflösung.

Die Subnormal-Linie ist $ydy = dx$ (§. 427). Demnach

$$ydy : dx = a$$

$$ydy = adx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = ax$$

$$y^2 = 2ax$$

Also ist die verlangte Linie eine Parabel/ deren Parameter der doppelten Subnormal-Linie gleich ist.

Die 35. Aufgabe.

520. **Eine krumme Linie zu finden/ deren Subtangens die mittlere Proportional-Linie ist zwischen x und y.**

Auflösung.

Es ist $ydx : dy = \sqrt{xy}$

$$ydx = dy\sqrt{xy} = x^{1:2}y^{1:2}dy$$

$$\text{———————} \; y$$

$$dx = y^{-1:2}x^{1:2}dy$$

$$\text{———————} \; x^{1:2}$$

$$x^{-1:2}dx = y^{-1:2}dy$$

$$2x^{1:2} = 2y^{1:2}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y}$$

$$x = y$$

Also ist die verlangte Figur ein gleichschencklichter rechtwincklichter Triangel. Ihr könnet aber auch setzen

$$\sqrt{x} + \sqrt{a} = \sqrt{y}$$

so ist $x + 2\sqrt{ax} + a = y$

$$2\sqrt{ax} = y - x - a$$

$$4ax = y^2 - 2yx + ax + 2ax - 2ay + aa$$

$$2ax - xx = y^2 - 2xy - 2ay + aa.$$

oder $2xy + 2ay - y^2 = x^2 - 2ax + aa$

Dergleichen Æquation auch heraus kommet/ wenn ihr $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{y}$ setzet.

Die 36. Aufgabe.

521. **Eine krumme Linie zu finden/ deren Subnormal-Linie = $r - x$.**

Auflösung.

Es ist $ydy : dx = r - x$

$$ydy = rdx - xdx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = rx - \tfrac{1}{2}x^2$$

$$y^2 = 2rx - xx$$

Also ist die verlangte Linie ein Circul/ dessen Diameter $= 2r$.

Die 46. Aufgabe.

522. **Eine Linie zu finden/ deren Subnormal-Linie = $\sqrt{ax}$.**

Es ist $ydy : dx = \sqrt{ax} = a^{1:2}\ x^{1:2}$

$$ydy = a^{1:2}\ x^{1:2}\ dx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3}$$

$$y^2 = \tfrac{4}{3}\sqrt{ax^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{4ax^3}$$

Also ist das Qvadrat der Semiordinate in die-

dieser Linie jederzeit einem Parabolischen Raume gleich.

Die 38. Aufgabe.

523. **Eine krumme Linie zu construiren / deren Subtangens einer unveränderlichen Linie gleich ist.**

Auflösung.

Es ist

$$ydx : dy = a$$

$$dx = ay^{-1}dy$$

$$\int dx = \int ay^{-1}dy$$

Wenn ihr $ay^{-1}dy$ (§. 434) integriren wollet / so käme heraus $ay^{0} : 0 = a : 0$ / das ist / eine unendlich grosse Grösse. Und also gehet die Integration Algebraisch nicht an. Da nun aber bekandt ist (§. 413) / daß die angenommene Eigenschafft der Logarithmischen Linie zugehöret / in dieser aber die Abscissen x die Logarithmi der Semiordinaten sind (§. 284.) so muß auch $\int ay^{-1}dx (= x)$ der Logarithmus der Semiordinate seyn / und dannenhero könnet ihr jederzeit für die Integral von $ay^{-1}dy$ oder $ady : y$ den Logarithmum von y oder ly setzen. Es muß aber der Logarithmus in einer Logarithmischen Linie genommen werden / deren Subtangens a ist.

Der 1. Zusatz.

524. Da nun die Differential eines Logarith-

rithmi $= ady : y$ / so könnet ihr jetzt auch diejenigen Grössen differentiiren / in welchen Logarithmi zu finden. Es sey z. E. ly^n / so ist die Differential $nly^{n-1}\, ady : y$.

Der 2. Zusatz.

525. Es sey die Differential eines Logarithmi $= dy : (1+y)$; so ist der Logarithmus der Zahl $1+y = \int dy : (1+y)$. Nun ist $1 : (1+y) = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4$ u. s. w. wie ihr es findet / wenn ihr in der That dividiret / und daher $dy : (1+y) = dy - ydy + y^2dy - y^3dy + y^4dy$ &c. Derowegen ist $\int dy : (1+y)$ oder der Logarithmus von der Zahl $1+y = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c.

Der 3. Zusatz.

526. Weil nun $l = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. so findet ihr (§. 489); $y = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1.2} + \frac{l^3}{1.2.3} + \frac{l^4}{1.2.3.4} + \frac{l^5}{1.2.3.4.5}$ &c. wo l den Logarithmum von 1 bedeutet und also $= o$.

Der 4. Zusatz.

527. Ihr sehet zugleich (§. 524) / wie die Differentiale der Logarithmischen Grössen integriret werden / wenn man a für die Subtangentem der Logarithmischen Linie annimmet. Es ist z. E. $\int ly^n dy : y = ly^{n+1} : (n+1)a$ / $\int lydy \sqrt{(aa+ly^2)} = (aa+ly^2)^{3:2} : 3a$ u. s. w.

Anmerckung.

528. Wenn man die Differential-Æquation nicht integriren kan / so suchet man dieselbe auf die Qvadratur oder Rectification des Circuls/ oder Parabel/ Hyperbel und Ellipsis zu reduciren/ weil diese Linien bekandt sind/ und ist vergnüget/ wenn man sagen kan/ daß die Constuction der verlangten Linie von der Qvadratur oder Rectification einer von der gemeldeten Linien dependire: wovon ich noch einige Exempel hieher setzen muß. Ihr habet euch aber zu dem Ende alle Elemente der Flächen und Länge in den Kegelschnitten bekandt zu machen/ damit ihr umb so viel leichter wahr nehmet/auf was für eine Qvadratur oder Rectification sich jeder vorkommender Fall reduciren lasse.

Die 39. Aufgabe.

529. **Eine krumme Linie zu construiren/ in welcher $dz = qdu$.**

Auflösung.

Es bedeutet q eine Grösse / die aus veränderlichen und unveränderlichen in Gestalt eines Bruches zusammen gesetzet ist. Beschreibet in unendlichen Fällen die unter der gegebenen Æquation begriffen sind / eine krumme Linie/ deren Abscissen $= u$/ die Semiordinaten $= aq$; so ist das Element dieser Linie $aqdu$. Wenn ihr nun dieses durch a dividiret/ so bekommet ihr qdu. Derowegen richtet auf eben der Axe für die Abscissen u andere Semiordinaten auf/ die $= \int qdu$/ das ist/ dem Raume gleich sind / der zwischen dieser krummen Linie und ihren Coordinaten enthalten / wenn man ihn durch eine unveränder-

änderliche Grösse a dividiret/ so bekommet ihr die Linie/ deren Differential-Æquation $dz = qdu$.

Der 1. Zusatz.

531. Es sey $ydx = ady$ oder $dx = ady : y$/ so sind die Semiordinaten der Linie von deren Quadratur die Construction dependiret/ $aa:y$. Da nun die Æquation einer gleichseitigen Hyperbel zwischen ihren Asymptoten (§. 265) $aa = zy$. So erkennet ihr daraus die Art der Linie.

Der 2. Zusatz.

531. Wenn in der verlangten Linie die Subtangens $= y\sqrt{(aa + yy)} : a$/ so ist $dx = dy\sqrt{(aa + yy)} : a$. Also sind die Semiordinaten der Linie / von deren Quadratur die Construction dependiret/ $\sqrt{(aa + yy)}$. Woraus ihr abermal erkennet / daß es eine ungleichseitige Hyperbel sey.

Ende des dritten Theiles.

Der vierdte Theil Von den Anfangs-Gründen der Exponential- und Differentio-Differential-Rechnung.

Die 1. Erklährung.

532. Die Exponential-Rechnung bestehet im Differentiiren und Integriren solcher Grössen/ die einen veränderlichen Exponenten haben. als x^x/ a^x/ und Exponential-Grössen genennet werden.

Die 1. Aufgabe.

533. Eine Exponential-Grösse zu differentiiren.

Auflösung.

Die gantze Kunst kommet darauf an/ daß man die Exponential-Grössen auf Logarithmische reduciret/ und sie (§. 524) differentiiret. Setzet nemlich

$$x^y = z$$

so ist $ylx = lz$

$lxdy + ydx:x = dz:z$ (§. 524)

$$z(lxdy + ydx:x) = dz$$

das ist $x^y(lxdy + ydx:x) = dz$

oder $x^y lxdy + yx^{y-1}dx = dz$

Setzet abermahl

$$v^{x^y} = z$$

so ist $x^y lv = lz$

$$(x^y lxdy + yx^{y-1}dx)lv + x^y dv:v = dz:z$$

$$z(x^y lxdy + yx^{y-1}dx)lv + zx^y dv:v = z$$

$$v^{x^y} x^y lxlvdy + v^{x^y} yx^{y-1} lvdx + v^{x^y} zv^{-1} x^y dv = dz.$$

Auf gleiche Weise verfahret ihr in andern Fällen.

Die 2. Erklährung.

534. Eine Exponential-Linie wird genennet eine krumme Linie / welche durch eine Exponential-Æquation erklähret wird / als wenn $x^x = y$.

Zusatz.

535. Wenn ihr die Exponential-Linien-Æquation differentiiret (§. 533) und den Werth von dx in dem Differential-Werthe der Subtan-

tangentis und Subnormal-Linie substituiret; so findet ihr wie in den Algebraischen Linien ihre Subtangentem und Subnormal-Linie. Es sey z. E.

$$x^x = y \quad \text{so ist}$$

$$ylxdx + ydx = dy$$

$$dx = dy:(ylx+y)$$

$$ydx:dy = ydy:(ylx+y)\,dy = 1:(1+lx)$$

Für die Subnormal-Linie ist

$ydy:dx = (y^2lxdx+y^2dx):dx = y^2lx + y^2 = y^2xx + y^2.$

Die 2. Aufgabe.

536. **Die Differential einer Exponential-Grösse zu integriren.**

Auflösung.

Ihr sollet z. E. $x^x dx$ integriren. Setzet

$$x = 1+y$$

So ist $lx = l(1+y)$

$$dx = dy$$

$$x^x dx = xlxdx = l(1+y)(1+y)\,dy.$$

Nun ist $l(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. Derowegen $l(1+y)(1+y)\,dy = y$

$y + -\frac{1}{2}y^2dy - \frac{1}{2.3}y^3dy + \frac{1}{3.4}y^4dy - \frac{1}{4.5}y^5dy$ &c.

folgends die verlangte Integral $\frac{1}{1.1.2}y^2 + \frac{1}{1.2.3}y^3 - \frac{1}{2.3.4}y^4 + \frac{1}{3.4.5}y^5 - \frac{1}{4.5.6}y^6$ &c. in welcher Reihe $y = x - 1$.

Auf gleiche Manier könnet ihr in anderen Fällen verfahren.

Zusatz.

537. Wenn ihr die Differential einer Exponential-Grösse integriren könnet / so könnet ihr auch die Exponential-Linien qvadriren/wenn ihr in dem Elemente der Fläche ydx den Werth x aus ihrer Æquation substituiret. Es sey Z. E. $x^x = y$ / oder $xlx = y$ / so ist $ydx = xlxdx$. Setzet $x = v + 1$, so ist $\int xlxdx = \frac{1}{1.1.2}v^2 + \frac{1}{1.2.3}v^3 - \frac{1}{2.3.4}v^4 + \frac{1}{3.4.5}v^5 - \frac{1}{4.5.6}v^6$ &c.

Anmerckung.

538. Man kan diese Aufgabe noch auf viele andere Art auflösen / ich habe den Anfängern nur die leichteste zeigen sollen.

Die 3. Erklährung.

539. Differentio-differentiiren heisset so viel als die Differential von einer Differential-Grösse finden.

Zu-

Zusatz.

540. Wenn die Differential dx ist/ so nennet ihre Differential oder die Differentio-Differential von x/ ddx; die Differential von ddx aber $dddx$ u. s. w.

Die 3. Aufgabe.

541. Eine jede gegebene Differential-Grösse von neuem zu differentiiren.

Auflösung.

Es geschiehet nach den Regeln (§. 396. & seqq.) nach welchen die veränderlichen Grössen differentiiret werden/ nur daß man eine Differential-Grösse meistentheils als eine unveränderliche annimmet und daher auch die andere Differential vor nichts hält (§. 391).

Z. E. Die andere Differential von xdx findet ihr $dx^2 + xddx$ (§. 396). $d(1 : dx) = - ddx : dx^2$ (§. 404); $d(ydy : dx) = (dy^2 - yddy) : dx$/ wenn ihr dx unveränderlich annehmet/ hingegen $= (dy^2dx - ydyddx) : dx^2 = dy^2 : dx - ydyddx : dx^2$ (§. 404); $d\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dyddy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ wenn dx unveränderlich; hingegen $dxddx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$/ wenn dy unveränderlich (§. 400) u. s. w.

Anmerckung.

542. Wenn die Rechnung auf gewisse Fälle appliciret wird/ so ist nicht schweer zu sehen/ welche Differential ihr für unveränderlich annehmen könnet.

Die 4. Erklährung.

Tab VI. Fig. 52. 543. Wenn eine krumme Linie AFK anfangs die hohle, hernach die erhabene Seite gegen die Axe AK kehret, und im̃er in einem mit der Axe fortgehet, so heisset der Punct F, wo die Wendung geschiehet, der **Wendungs-Punct**; hingegen der **Wiederkehr-Punct**, wenn sie wieder zurücke gegen die Axe kehret. Im Lateinischen nennet man sie Puncta flexus contrarii.

Der 1. Zusatz.

544. Wenn die krumme Linie einen Wendungs-Punct hat, so ist klahr, daß die Linie AT zunimmet mit der Abscisse AP, bis diese in E kommet, denn so bald sich die Linie wendet, so nimmet die Linie AT wieder ab, und die Abscisse nimmet wie vorhin zu. Derowegen könnet ihr AL als die gröste Linie von ihrer Art ansehen.

Der 2. Zusatz.

545. Hingegen wenn die krumme Linie einen Wiederkehrungs-Punct hat, so wächset anfangs die Linie AT zugleich mit der Abscisse biß in L: nach diesem wenn die Linie sich wendet, nimmet die Linie AT zu, hingegen die Abscissen gehen wieder zurücke und nehmen ab, und dannenhero muß in diesem Falle die Linie AE die gröste von ihrer Art werden.

Der

Der 3. Zusatz.

546. Da nun AL = $(ydx:dy)-x$ (§. 413), so ist, wenn ihr dx für unveränderlich annehmet, $(dy^2dx-ydxddy) dy^2-dx = 0$

$$dy^2dx-ydxddy-dy^2dx=0.$$

$$-yddy=0$$

$$-y$$

$ddy=0$, oder $ddy=\infty$ (§. 416)

Anmerckung.

547. Man nimmet dx für unveränderlich an, in Ansehung dy. Denn weil dy endlich zu nichts wird im Puncte F, da dx einmahl so groß wie das andere angenommen wird; so muß dy nach und nach abnehmen, und dannenhero veränderlich seyn, indem dx unveränderlich behalten wird.

Der 4. Zusatz.

548. Wenn die Semiordinaten BM aus einem Puncte B gezogen sind, so ziehet Bm und BM unendlich nahe, u. Bt auf BM perpendicular: dañ ist klahr, daß an der hohlen Seite Bt grösser ist als BO, hingegen an der erhabenen kleiner wird. Derowegen ist in dem Wendungs-Puncte tO = 0. Beschreibet nun aus dem Mittelpuncte B den Bogen TH und MR, so sind die Triangel mMR MBT und THO einander ähnlich, und die Ausschnitte des Circuls sind wegen der unendlichen kleinen Winckel bey B auch einander ähnlich. Demnach ist (§. 182 Geom.). Tab. VI. Fig. 53.

$$mR : MR = BM : BT$$
$$dy \quad dx \quad y \quad ydx:dy$$
$$BM : BT = MR : TH$$
$$y \quad ydx:dy \quad dy \quad dx^2:dy$$
$$MR : TH = TH : HO$$
$$dx \quad dx^2:dy \quad dx^2:dy \quad dx^3:dy^2$$

Also ist die Differential von BT oder tH wenn ihr dx für unveränderlich annehmet/ $= (dxdy^2 - ydxddy) : dy^2$ (§. 541); dannenhero $OH + tH = Ot = (dx^3 + dxdy^2 - ydxddy) : dy^2$. Da nun die Linie tO im Wendungs-Puncte nichts wird/ so ist

$$(dx^3 + dxdy^2 - ydxddy) : dy^2 = 0$$

$$dx^2 + dy^2 - yddy = 0 \text{ oder } = \infty$$

Die 4. Aufgabe.

549. **Den Wendungs-Punct in einer Linie zu finden/ da die Semiordinaten miteinander parallel sind.**

Auflösung.

Weil in diesem Falle $ddy = 0$/ so suchet
Tab. VI. diesen Werth aus der gegebenen Æquation
Fig. 52. für die krumme Linie durch x/ und ihr werdet daraus den Werth von AE/ das ist/ der Absciße finden / welcher die aus dem Wendungs-Puncte F gezogene Semiordinate EF zugehöret.

Der

Der 1. Zusatz.

550. Es sey $axx = xxy + aay$

so ist $2axdx = 2xydx + x^2dy + aady$

$2axdx - 2xydx = x^2dy + aady$

d. i. $2axdx - (2ax^3dx : (xx + aa) = x^2dy + aady$

$2a^3xdx : (xx + aa) = x^3dy + aady$

$2a^2xdx : (xx + aa)^2 = dy$

Wenn ihr nun dx für unveränderlich annehmet/ so ist

$2a^3dx^2(xx + aa)^2 - (8a^3x^4dx^2 - 8a^5x^2dx^2) :$
$(x^2 + a^2)^4 = ddy = 0$

$2a^3x^2 + 2a^5 - 8a^3x^2 = 0$

$2a^3$

$xx + aa - 4xx = 0.$

$\sqrt{\frac{1}{3}a^2} = x$

Setzet ihr diesen Werth in die Stelle von x in der Æquation

$y = axx : (xx + aa)$

so ist $y = \frac{1}{3}a^3 : (\frac{1}{3}aa + aa) = \frac{1}{3}a^3 : (\frac{4}{3}aa)$
$= a^3 : 4aa = \frac{1}{4}a.$

Solchergestalt könnet ihr den Wendungs-Punct finden/ auch wenn die krumme Linie nicht beschrieben ist.

Der 2. Zusatz.

551. Es sey

$$y-a = (x-a)^{3:5}$$

so ist $dy = \frac{3}{5}(x-a)^{-2:5}dx$

$$ddy = -\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5}dx^2 = 0$$

Wenn nemlich dx unveränderlich angenommen wird: folgends

$$-\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5} = 0$$

$$-6 = 0.$$

Weil ihr keinen Werth von x findet/so setzet

$$-\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5}dx^2 = \infty$$

das ist $-6dx^2 : \sqrt[5]{(x-a)^7} = \infty$

so ist $\sqrt[5]{(x-a)^7} = 0$

$$x-a = 0$$

$$x = a$$

Der 3. Zusatz.

552. In der Parabel ist

$$ax = y^2$$

$$a^{1:2}x^{1:2} = y$$

$$\frac{1}{2}a^{1:2}x^{-1:2}dx = dy$$

-$\frac{1}{4}$

$$-\frac{1}{4}a^{1:2}x^{-1:2}dx^2 = ddy = 0$$

$$-\frac{1}{4}a^{1:2} = 0$$

Setzet ferner

$$\frac{1}{2}a^{1:2}x^{-3:2}dx^2 = \infty$$

so ist $x^{3:2} = 0$

Da ihr nun keinen Werth von x findet, ihr möget $ddy = 0$ oder $ddy = \infty$ setzen; so hat die Parabel keinen Wendungs-Punct.

Die 5. Aufgabe.

553. **Den Wendungs-Punct in einer krummen Linie zufinden, deren Semi-ordinaten alle aus einem Puncte gezogen werden.**

Auflösung.

Weil in diesem Falle $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$ (§. 548) so dörfet ihr nur aus der gegebenen Æquation für die Linie den Werth von dy durch dx expprimiren und ihr werdet wie vorhin den Werth von x in unveränderlichen Grössen finden können.

Zusatz.

554. Es sey in der Conchoide des Nicomedis EC $= a$, ED $= b$, De $= z$, $dc = y$, so ist (§. 276) Tab. III. Fig. 28.

$$z + a = y$$

$$dz = dy$$

Ferner ist Ee = $\sqrt{(zz-bb)}$ und (§. 182 Geom.

$$\begin{array}{cccc} Ee & : DE & = nF & : eF \\ \sqrt{(zz-bb)} & b & dz & bdz : \sqrt{(zz-bb)} \\ De & : eF & = Dc & : cL \\ z & bdz : \sqrt{(zz-bb)} & z + a & cL \end{array}$$

Demnach ist cL = $(z+a)\, bdz : z\sqrt{(zz-bb)}$ = dx, folgends

$$(z+a)\, bdz = zdx\sqrt{(zz-bb)}$$

$$dz = dy = zdx\sqrt{(zz-bb)} : (bz+ab).$$

$ddy = (bz^3 + 2abzz - ab^3)dzdx : (bz+ab)^2 \sqrt{(zz-bb)}$, wenn ihr dx für unveränderlich annehmet, $= (bz^4 + 2abz^3 - ab^3z)\, dx^2 : (bz+ab)^3$, wenn ihr für dx seinen Werth setzet.

Setzet nun in der Æquation $yddy = dx^2 + dy^2$ (§. 548) die gehörigen Werthe an ihre Stelle, so habet ihr

$$(z^4 + 2az^3 - abbz)\, dx^2 : (bz+ab)^2 = (z^4 + 2abbz + aabb)\, dx^2 : (bz+ab)^2$$

$$z^4 + 2az^3 - abbz = z^4 + 2abbz + aabb$$

$$2az^3 - 3abbz - aabb = 0$$

$$z^3 - \tfrac{3}{2}bbz - \tfrac{1}{2}abb = 0$$

Suchet endlich aus dieser Gleichung die Wurtzel (§. 373). Wenn ihr diese mit a vermehret, so habet ihr die verlangte Linie DC

DC ($=z+a$)/ welche den Wendungs-Punct determiniret.

Die 5. Erklährung.

555. Wenn eine krumme Linie BDF mit einem Faden überleget ist/ so immer gleichviel gedehnet wird und die gerade Linie BA anfangs die krumme in B berühret/ hernach aber immer nach und nach von der krummen abgezogen wird/ so beschreibet der äussere Punct A eine andere krumme Linie AHR/ und nennet man die krumme Linie BDF die Evolute der Linie AHR/ die Theile des Fadens DH/ RF &c. aber die RADIOS der Evolute. Tab. VI. Fig. 53.

Der 1. Zusatz.

556. Wenn der Punct A in B fället und AB $=0$/ so ist DH oder der Radius der Evolute dem Bogen BD/ sonst aber der Differenz zwischen dem Bogen DB und der Linie AB gleich.

Der 2. Zusatz.

557. Ihr könnet jeden unendlich kleinen Bogen der Linie AHR als einen Circul-Bogen ansehen/ der mit dem Radio DH/ oder FR/ &c. aus dem Mittel-Puncte D oder F &c. beschrieben worden/ und demnach stehen die Radii der Evolute alle auf der Linie AHR perpendicular (§. 429).

Der 3. Zusatz.

558. Weil nur so lange ein Circul-Bogen beschrieben wird/ als der Radius der Evolute DH mit einem unendlich kleinen Bogen in der Evolute BDF eine gerade Linie machet; so müssen alle Radii die Evolute BDF berühren (§. 409).

Die 6. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 53. 559. **Die Länge des Radii der Evolute MC zufinden/ wenn die Semiordinaten PM der Linie AMD auf der Axe AB perpendicular stehen.**

Auflösung.

Es sey die Semiordinate pm der andern PM unendlich nahe/ ingleichen der Radius cm dem Radio CM. Ziehet CE mit der Axe AB parallel/ bis sie die verlängerte Semiordinate in E erreichet. Weil bey R und E rechte Winckel sind/ und RMm = EMC/ indem EMG und cMm (§. 557) rechte Winckel seyn/ so ist auch MmR = EcM (§. 99 Geom.) folgends (§. 182 Geom.).

MR : Mm = ME : MC

$dx \quad \sqrt{(dx^2 + dy^2)} \quad z \quad z\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx$

Da nun der Mittelpunct in C ist/ daraus der kleine Bogen Mm mit dem Radio cM beschrieben/ und dieser unverändert bleibet/ indem ME umb mR zunimmet; so muß die Differential des Radii cM in Ansehung der Differential mR der Linie ME nichts seyn.

Nun

Nun ist die Differential des Radii cM/ wenn ihr dx für unveränderlich (das ist in allen Puncten der Linie von gleicher Grösse) annehmet/ $(dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy) : dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Derowegen habet ihr

$$dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy) : dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 0$$

$$dzdx^2 + dzdy^2 = -zdyddy$$

$$dyddy$$

$$(dzdx^2 + dzdy^2) : -dyddy = z$$

Das ist/ weil $dz = dy$

$$(dx^2 + dy^2) : -ddy = z.$$

Wenn ihr nun die Werthe von dy^2 und ddy durch x aus der Æquation für die krumme Linie exprimiret/ so werdet ihr den Werth von z durch x finden.

Der 1. Zusatz.

560. In der Parabel ist

$$ax = y^2$$

daher $adx = 2ydy$

$$adx : 2y = dy$$

$$a^2dx^2 : 4y^2 = dy^2$$

Das ist $adx^2 : 4x = dy^2$

Und wenn ihr dx für unveränderlich annehmet

$$-adx^2 : 4x\sqrt{ax} = ddy.$$

Folgends $(dx^2 + dy^2) : -ddy = (4xdx^2 + adx^2)x\sqrt{ax}$

$\sqrt{ax} : axdx^2 = (a + 4x)\sqrt{ax} : a = \sqrt{ax} +$
$4x\sqrt{ax} : a = z.$

Der 2. Zusatz.

561, Es sey für unendliche Parabeln

$$y^m = x$$

so ist $\quad my^{m-1}dy = dx$

Wenn ihr nun dx für unveränderlich anneh-
met/ so ist

$(mm-m)y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = 0$

$(mm-m)y^{m-2}dy^2 = -my^{m-1}ddy$

$(m-1)y^{-1}\ dy = -ddy$

das ist $(m-1)dy : y = -ddy$. Demnach ist
$(dx^2 + dy^2) : -ddy = (ydx^2 + ydy^2) : (m-1)dy^2$.

Nun ist $dx^2 = m^2y^{2m-2}dy^2$. Derowe-
gen wann ihr diesen Werth in die Stelle von
dx^2 setzet/ bekommet ihr

$(m^2y^{2m-1}\ dy^2 + ydy^2) : (m-1)dy^2 = z.$

$(m^2y^{2m-1} + y) : (m-1) = z.$

Setzet Z. E. $m = 2$/ so ist $4x\sqrt{x} + \sqrt{x} = z$.
welche Æquation mit der vorigen überein
kommet/wenn $a = 1$.

Anmerckung.

560. Wenn euch das Differentiiren beschwerlich
fallen will; so brauchet den Vortheil/ dadurch wie o-
ben (§. 406) die Regeln zu differentiiren/ zu fin-
den angewiesen.

Ende des vierdten Theiles.

Anhang
Zu der Algebra
darinnen
ihr Nutzen in verschiedenen Wissenschafften durch Exempel gezeiget wird.

Die 1. Erklährung.

1.

Die Geschwindigkeit/ mit welcher sich ein Cörper beweget/ ist die Verhältnis des Raumes zu der Zeit.

Der 1. Zusatz.

2. Es sey der Raum = r/ die Zeit = t/ so ist die Geschwindigkeit = $r:t$.

Die 2. Erklährung.

3. Die Materie eines Cörpers ist diejenige/ welche mit ihm wieget und beweget wird.

Zusatz.

4. Daher ist sie seiner Schwere jederzeit proportional.

Die 3. Erklährung.

4. Die Grösse der Bewegung erwächset/ wenn die Materie des Cörpers durch die Geschwindigkeit der Bewegung multipliciret wird.

Zu-

Zusatz.

6. Es sey die Geschwindigkeit des Cörpers $=c$ seine Materie $=m$ / so ist die Grösse der Bewegung $=mc$.

Die 1. Aufgabe.

7. Die Lehrsätze zufinden / nach welchen die Bewegungen zweyer Cörper / die sich die gantze Zeit ihrer Bewegung mit einerley Geschwindigkeit bewegen / verglichen werden.

Auflösung.

Es sey der eine Cörper A / seine Geschwindigkeit C / seine Materie M / die Zeit seiner Bewegung T / der Raum / den er durchlauffen R: die Grösse der Bewegung Q. Der andere Cörper a / seine Geschwindigkeit c / seine Materie m / die Zeit seiner Bewegung t / der Raum / den er durchlauffen / r / die Grösse seiner Bewegung q. So ist C $=$ T:R und $c=t:r$ (§. 2) und Q $=$ CM / aber $q=cm$ (§. 6). Solchergestalt habet ihr

I. $C:c=(T:R):(t:r)$

II. $Q:q=CM:cm$

Setzet $C=c$ / so ist $T:R=t:r$. folgends

III. $T:t=R:r$

Setzet $Q=q$ / so ist $CM=cm$. Folgends

IV. $C:c=M:m$

Setzet ferner $T=t$ / so ist

V. $R=r$.

Se-

Setzet $C = c$ / so ist

VI. $M = m$.

Wiederumb weil $C:c = (R:T):(r:t)$ so ist $CTr = ctR$ / folgends

VII. $T:t = cR:Cr$.

VIII. $R:r = TC:tc$

Setzet $T = t$ / so ist $Cr = cR$. Folgends

IX. $C:c = R:r$.

Setzet $R = r$ / so ist $CT = ct$. Folgends

X. $C:c = t:T$.

Weil $Q:q = CM:cm$, so ist $Qcm = qCM$ / folgends

XI. $C:c = Qm:qM$

XII. $M:m = Qc:qC$

Setzet $C = c$ / so ist $Qm = qM$. Folgends

XIII. $Q:q = m:M$.

Setzet $M = m$, so ist $Qc = qC$. Folgends

$Q:q = C:c$

Endlich weil

$C:c = (R:T):(r:t)$

$Q:q = CM:cm$

so ist $CQ:qc = tRCM:Trcm$

$$CQTrcm = cqtRCM \quad | \; Cc$$

$$QTrm = qtRM$$

dannenhero ist

XIV. $Q:q = tRM:Trm$

XV. $T:t = qRM:Qrm$

XVI. $R:r = QTm:qtM$

XVII. $M:m = QTr:qtR$.

Anmerckung.

8. Es ist nicht nöthig zu erinnern/ wie die gefundenen Lehrsätze ausgesprochen werden/ weil solches denen zur Gnüge bekandt seyn muß/ die das vorhergehende verstanden. Aber wohl ist nöthig/ daß ich ermahne/ man solle sich diese Lehrsätze wohl bekandt machen/ die weil man in Auflösung anderer Aufgaben dieselbe gar öfters von Nöthen hat. Mercket aber zugleich/ wie man so viel Lehrsätze durch die Algebra gleichsam spielende heraus bringen kan/ die sonst durch viele Umbwege zu erweisen und noch schweerer zu erfinden wären.

Die 2. Aufgabe.

9. **Die Gesetze zu finden/ nach welchen die schweren Cörper in einem Raume da ihnen kein Wiederstand geschiehet/ herunter fallen.**

Auflösung.

1. Es ist aus der Erfahrung klahr/ daß/ wenn ein schweerer Cörper herunter fället seine Bewegung umb so viel geschwinder wird/ je länger er fället. Daraus denn folget/ daß die Schweere dem Cörper nach und nach einen neuen Druck geben muß/ da die Würckung des ersten noch nicht vergangen/ in dem kein Wiederstand vorhanden. Da nun in den Höhen/ in welchen wir Experimente anstellen können/ die Schweere der Cörper einerley gefunden wird; so können wir glauben/ daß die Schwee-

Schweere, in jedem Augenblicke einen gleichkräftigen Druck dem Cörper gebe. Es sey also der Augenblick t/ die Geschwindigkeit/ welche der Cörper in einem erlanget c; so ist nach Verfliessung $2t$ die Geschwindigkeit $2c$/ nach Verfliessung $3t$ ist sie $3c$ u. s. w. Nun verhalten sich die Räume/ welche die Cörper durchlauffen/ wie die Producte aus den Zeiten in die Geschwindigkeiten (§. 7); daher ist der Raum/ durch welchen der Cörper im ersten Augenblicke gefallen/ tc; zu Ende des andern Augenblickes ist sein Raum/ den er durchgelauffen $4tc$; zu Ende des dritten $9tc$; zu Ende des vierdten $16tc$; zu Ende des fünften/ $25tc$ &c. **Demnach verhalten sich diese Räume gegen einander wie $1tc : 4tc : 9tc : 16tc : 25tc$ &c. das ist/ wie $1 : 4 : 9 : 16 : 25$ &c. oder die Qvadrate der Zeiten.**

II. Ziehet nun die Höhe durch welche der Cörper im ersten Augenblicke gefallen von der Höhe ab/ durch welche er in zweyen gefallen; so bleibet für den andern Augenblick 3 übrig/ eben so findet ihr für den dritten 5/ für den vierdten 7/ für den fünften 9 &c. Wenn nun die Zeiten der Bewegung gleich sind/ so verhalten sich die Geschwindigkeiten/ mit welcher sich der Cörper beweget/ wie die Räume/ so er beschrieben (§. 7). Solchergestalt

wird die Bewegung der schweeren Cörper nach den ungeraden Zahlen geschwinder gemacht.

III. Da nun $R : r = T^2 : t^2$ / so ist $\sqrt{R} : \sqrt{r} = T : t$. Ihr könnet also die Zeiten durch die Wurtzeln des Raumes exprimiren.

IV. Wenn ihr demnach in einer Parabel die Abscissen für R annehmet/ so sind die Semiordinaten $\sqrt{R}$.

V. Wiederumb weil $R : r = C^2 : c^2$ so ist $\sqrt{R} : \sqrt{r} = C : c$. Ihr könnet also die Geschwindigkeit durch die Wurtzeln des Raumes ausdrucken.

VI. Dannenhero wenn die Abscissen in einer Parabel R sind/ so sind die Semiordinaten $\sqrt{R}$ und also $= C$.

Zusatz.

10. Wenn in dem Triangel $AB = BC =$
Tab. VII. $CD = DE = T$ / $BF = CG = DH = EI$
Fig. 57. $= C$; so sind die Triangel $= \frac{1}{2} TC = R$. Wenn ihr nun setzet/ daß alle Ordinaten BF/ CG/ DH/ EI einander gleich sind/ so wird der Triangel ein Rectangulum, dessen Inhalt $= TC$. Da nun dieses den Raum vorstellet/ welchen der Cörper in der Zeit T mit der Geschwindigkeit C durchlauffen würde/ die er zu Ende der Zeit hat/ wenn er sie gleich anfangs hätte und stets dieselbe unverändert behielte; so ist klahr/ daß dieser Raum sich

zu

zu jenem verhält wie TC zu $\frac{1}{2}$TC/ das ist wie 1 zu $\frac{1}{2}$/ oder wie 2 zu 1.

Die 3. Aufgabe.

11. Aus der gegebenen Zeit/ in welcher ein Cörper durch eine gewisse Höhe gefallen ist/ zu finden/ wie er in jedem Theile derselben Zeit gefallen.

Auflösung.

Es sey der erste Theil der Zeit 1/ die Zahl der Theile m/ der Raum in dem ersten Theile x; so ist der Raum in dem letzten $(2m-2)x+x$ (§. 9. & §. 66 Arithm.) und die Summe in allen Theilen der Zeit m^2x (§. 107 Algebr.). Setzet nun den gantzen Raum a/ so ist

$$m^2x = a$$

$$x = a : m^2/$$

Es sey Z. E. $a = 125$/ $m = 5$ Secunden/ so ist $x = 125 : 25 = 5$. Also ist der Cörper in der ersten Secunde 5'/ in der andern 15 in der dritten 25/ in der vierdten 35/ in der fünften 49' gefallen.

Die 4. Aufgabe.

12. Es bewegen sich zwey Cörper durch einen Weg mit verschiedener Geschwindigkeit und in verschiedenen Zeiten von verschiedenen Orten an / man sol aus dem gegebenen Unterscheide der

Zeit und der Distantz der Oerter / wo sie sich zu bewegen anfangen / und der Geschwindigkeit/den Ort finden/ wo sie zusammen kommen.

Auflösung.

Es beweget sich der eine Cörper in der Zeit T durch R/ der andere in der Zeit t durch den Raum r. Die Distqntz der Oerter / wo sie sich zu bewegen anfangen/ ist d/ der Unterscheid der Zeiten m. Setzet die Länge des Weges/ so der weiteste zu lauffen hat x/ so ist der Weg des andern $x-m$. Setzet die Zeit der Bewegung des ersten y / des andern z. So ist

$$T:R=y:x \qquad t:r=z:x-d$$

$$Ry=Tx \qquad rz=tx-td$$

$$y=Tx:R \qquad z=(tx-td):r$$

$$Tx:R-(tx+td):r=m$$

$$Trx-tRx+tRd=mrR$$

$$Trx-tRx=mrR-tRd$$

$$x=(mrR-tRd):(Tr-tR)$$

Hingegen wenn $z-y=m$/ so findet ihr $x=(mrR+Rtd):(Rt-Tr)$.

Zusatz.

13. Wenn die Cörper einander entgegen ge-

gehen/ so findet ihr den Ort/ wo sie einander begegnen/ fast wie vorhin. Denn es sey die Weite der beyden Oerter/ wo sie sich anfangen zu bewegen/ m; die Weite des einen von dem Orte / wo sie zusammen kommen/ x; so ist die Weite des andern davon $m-x$. Wenn nun das übrige wie vorhin bleibet/ so habet ihr

$T:R = y:x \quad t:r = z:m-x \quad y+z = m$

$z-y = m$

$Tx = Ry \quad tm-tx = rz$

$Tx:R = y \quad (tm-tx):r = z$

$$Tx:R-(tm+tx):r = m$$

$$Trx-tmR+tRx = mrR$$

$$Trx+tRx = mrR+tmR$$

$$x = (mrR+tmR):(Tr+tR)$$

Wenn $z-y = m$/ so findet ihr $x = (tmR-mrR):(tR+Tr)$.

Anmerckung.

14. Z. E. Die Sonne lauffet in einem Tage beynahe einen/ der Mond 13. Grade. Setzet nun/ die Sonne sey heute im 8° ♌/ den Monden sehet ihr über 5 Tage in dem 6° ♉: so könnet ihr durch die Regel des andern Falles in der Aufgabe finden / in welchem Orte des Himmels der Mond und die Sonne am ersten zusammen kommen werden. Es ist nemlich $T = 1$/ $t = 1$/ $R = 13°$/ $r = 1$/ $m = 5$/ $d = 92$/ folgends $x = (mrR + Rtd):(Rt-Tr) = (5.1.13.+13.1.92.):(13.1.-1.1) = (65+1196):(12$

$= 1261:12 = 105\frac{1}{12}$. Wenn ihr nun diese Grade zu dem Orte des Mondens 36° addiret/ so kommet für den Ort der Zusammenkunfft $141\frac{1}{12}$/ das ist (wenn ihr mit 30 dividiret) $21^\circ \frac{1}{12}$ ♌.

Die 5. Aufgabe.

Tab. VII. Fig. 58. **15. Es wird eine Kugel aus C nach der Linie DC wieder die Wand AB geworffen/ man sol den Winckel EDG finden/ welchen die Linie EB nach welcher er zurück prallet / mit AB macht. Wir wollen CDF den Einfalls-Winckel/ EDG aber den Reflexions-Winckel nennen.**

Auflösung.

Lasset aus C und E die Perpendicular-Linien CF und EG fallen. Es sey $CF = a$/ $EG = b$/ $FG = c$/ $DF = x$/ so ist $DG = c - x$/ $(CC)^2 = aa + xx$/ $(DE)^2 = bb + cc - 2cx + xx$. Da nun die Natur immer den kürtzesten Weg gehet/ so muß die Kugel in D dergestalt zurücke prallen/ daß sie bis E den kürtzesten Weg nimmet / welchen sie aus C durch das zurücke prallen von der Fläche AB nehmen kan. Und demnach ist CD+DE die kleineste Grösse von ihrer Art ; bildet euch demnach eine krumme Linie ein/ deren Æquation

$$\sqrt{(aa + xx)} + \sqrt{(bb + cc - 2cx + xx)} = y$$

so ist $xdx : \sqrt{(aa + xx)} + (xdx - cdx) : \sqrt{(bb + cc - 2cx + xx)} = dy = 0$ (§. 416)

$$x\sqrt{(bb+cc-2x+xx)}+(x-c)\sqrt{(aa+xx)}=0$$

$$x\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)}=(2c-ax)\sqrt{(aa+xx)}$$

das ist FD. ED = DG. CD.

Folgends FD : CD = DG : DE. Wenn nun CD = DE/ so ist auch DF = DG.

Also ist der Reflexions-Winckel EDG dem Einfalls-Winckel CDF gleich.

Zusatz.

16. Hieraus sehet ihr zugleich/ daß/ wenn ein Strahl des Lichtes CD auf einen Spiegel fället/ er dergestalt in E reflectiret wird/ daß der Reflexions-Winckel EDG dem Einfalls-Winckel CDF gleich ist.

Die 6. Aufgabe.

17. **Aus der gegebenen Distantz eines strahlenden Punctes A von dem Mittelpuncte B eines Sphärischen Spiegels DEF den Punct zu finden / wo der reflectirte Strahl DE mit der Axe vereiniget wird.** Tab. VII. Fig. 59.

Auflösung.

Es sey AB = a/ BD = BE = r/ BC = x/ so ist CE = r-x. Weil das Auge / welches den strahlenden Punct A im Spiegel siehet/ in der Axe AE stehet/ so muß der Punct D/ wovon der Strahl / der in das Auge fället / reflectiret wird / der Axe A E überaus nahe seyn. Und dannenhero ist

DC = CE = $r-x$ / die Winckel m, n, p und und q sind unendlich kleine / und daher ist DB : AB = $m : n$ und DC : CB = $q : p$ / folfolgends auch DB+AB : AB = $m+n : n$. Da nun $q = m+n$ (§. 100. Geom.) und $p = n$ (§. 16); so ist DB+AB : AB = $q : p$. Derowegen ist

$$DB+AB : AB = DC : BC$$

das ist / AE : AB = EC : BC

$$a+r \quad a \quad a-x \quad x$$

$$ax+rx = ar-ax$$

$$2ax+rx = ar$$

$$x = ar : (r+2a)$$

$r-x = r-ar:(r+2a) = (r^2+ar) : (r+2a)$. Das ist / EC = (AE.BE) : (BE+2AE) / oder / wenn ihr AE = $r+a = d$ setzet / = $dr : (2d-r)$.

Der 1. Zusatz.

18. Wenn d grösser ist als r so ist auch $2d : (2d-r)$ grösser als 1 (§. 70) und daher $\frac{1}{2}r . 2d : (2d-r) = dr : (2d-r)$ grösser als $\frac{1}{2}r$ / das ist / wenn der strahlende Punct a vor dem Hohl-Spiegel weiter weg ist als der Semidiameter des Spiegels BE austräget / so ist die Distantz des Bildes EC grösser als der vierdte Theil des Diameters.

Der

Der 2. Zusatz.

19. Wenn d grösser als r / so ist auch $2d-r$ grösser als d / und daher $d:(2d-r)$ weniger als 1 (§. 70) / folgends $dr:(2d-r)$ weniger als r / das ist / die Distantz des Bildes von dem Hohl-Spiegel ist geringer als der Diameter.

Der 3. Zusatz.

20. Wenn $d=r$ / so ist $dr:(2d-r)=rr:(2r-r)=r$ / das ist / wenn der strahlende Punct umb den halben Diameter des Spiegels von demselben weg ist / oder in seinem Mittelpuncte stehet / so wird auch sein Bild daselbst gesehen.

Der 4. Zusatz.

21. Wenn $d=\frac{1}{2}r$ / so ist $2d=r$ und $rd:(2d-r)=dr:o$ / das ist / die Distantz des Bildes von dem Hohl-Spiegel wird unendlich groß / weil der Nenner in Ansehung des Zehlers zu nichts wird / das ist / die Strahlen werden mit der Axe parallel / denn in diesem Falle können sie niemals mit ihr zusammen kommen.

Der 5. Zusatz.

22. Wenn d kleiner ist als r und $2d$ grösser als r (oder d grösser als $\frac{1}{2}r$) so ist $2d:(2d-r)$ grösser als 1. Denn setzet $2d=r+m$ / so ist $2d-r=m$ / und daher $2d:(2d-r)=1+r:m$. Und demnach ist $\frac{1}{2}r.2d:(2d-r)$ grösser als $\frac{1}{2}r$.

Derg.

Derowegen wird das Bild ausser dem Hohl-Spiegel gesehen/ wenn die Sache zwischen dem Mittelpuncte und dem Brenn-Puncte lieget/ der (§. 24) umb $\frac{1}{2}r$ vom Spiegel weg ist.

Der 6. Zusatz.

23. Wenn d kleiner ist als $\frac{1}{2}r$/ so hat der Nenner $2d-r$ das Zeichen -. Denn setzet $2d=r-m$/ so ist $2d-r=-m$. Und also hat der gantze Bruch $dr:(2d-r)$ das Zeichen -. Derowegen muß der Ort des Bildes hinter dem Hohl-Spiegel seyn/ wenn die Sache zwischen dem Brenn-Puncte und dem Spiegel liget.

Der 7. Zusatz.

24. Wenn d unendlich groß wird/ das ist/ wenn die Strahlen mit der Axe parallel einfallen / so ist r in Ansehung $2d$ für nichts zu halten/ und demnach ist $dr:(2d-r) = dr:2d = \frac{1}{2}r$.

Der 8. Zusatz.

25. Wenn der Spiegel erhaben ist/ so ist $d=a-r$/ und daher bekommet ihr an stat $(rr+ar):(2a+r)$ die Linie EC $=(ar-rr):(2a-r)=dr:(2d+r)$. Denn weil $2a-2r=2d$/ so ist $2a-r=2d+r$. Weil nun hier d allzeit grösser ist als r (denn sonst müste die Sache innerhalb dem Spiegel stehen) / und $d:(2d+r)$ weniger als 1; so ist auch $dr:(2d$

$+r)$

+ r) weniger als r. Derowegen wird das Bild zwischen dem Mittelpuncte des Spiegels und seiner Fläche gesehen/ die Sache mag so weit weg seyn als sie wil.

Der 9. Zusatz.

26. Setzet d unendlich groß/ so ist r in Ansehung $2d$ unendlich kleine und dannenhero $dr:(2d+r) = dr:2d = \frac{1}{2}r$. Derowegen wird das Bild niemals weiter hinter einem erhabenen Spiegel gesehen/ als den vierdten Theil des Diameters/wenn es gleich unendlich weit wegstehet.

Anmerckung.

27. Es ist nicht nöthig zu erinnern/ daß/ wenn d und r durch Zahlen exprimiret werden/ auch die Distantz des Bildes von der Spiegel-Fläche in Zahlen heraus komme/ und ihr auch daher die Verhältnis der Distantz zum Diameter des Spiegels finden könnet.

Der 10. Zusatz.

28. Wenn r unendlich groß wird/so ist der Spiegel platt und als denn ist $2d$ in Ansehung r unendlich kleine. Derowegen wird in diesem Falle $dr:(2d+r) = dr:r = d$/ das ist/ in einem platten Spiegel ist das Bild so weit hinter/ als die Sache vor demselben.

Der 11. Zusatz.

29. Setzet die Distantz des strahlenden Punctes in einem Hohl-Spiegel werde nd so ist die Distantz des Bildes $ndr:(2nd-r)$.

Dero-

Derowegen weñ die Weiten des strahlenden Punctes von dem Hohl-Spiegel sich gegen einander verhalten wie d zu nd/ so verhalten sich die Weiten des Bildes von demselben wie $dr:(2d-r)$ zu $ndr:(2nd-r)$/ das ist/ wie $n:(2nd-r)$ zu $1:(2d-r)$/ oder wie $2nd-rn$ zu $2nd-r$. Wenn nun n eine gantze Zahl und d grösser als r ist; so ist $2nd-rn$ kleiner als $2nd-r$. Derowegen wenn der strahlende Punct ausser dem Mittelpuncte des Spiegels ist/ so gehet das Bild näher zu dem Spiegel/ wenn der strahlende Punct weiter davon weggehet. Hingegen wenn n eine gebrochene Zahl ist/ so ist $2nd-rn$ grösser als $2nd-r$. Derowegen wenn der strahlende Punct von dem Hohl-Spiegel weiter weg ist als der Mittelpunct desselben/ so gehet das Bild vom Spiegel weg/ wenn der strahlende Punct sich zu demselben nähert.

Der 12. Zusatz.

29. Wenn d kleiner ist als $\frac{1}{2}r$ und nd gleichfals kleiner als $\frac{1}{2}r$/ so verhalten sich die Weiten des Bildes von dem Spiegel wie $r-2nd$ zu $rn-2nd$. Wenn nun n eine gantze Zahl ist/ so ist $rn-2nd$ grösser als $rn-2nd$/ das ist/ wenn der strahlende Punct vom Spiegel weggehet/ so gehet auch das Bild davon weg. Hingegen wenn n eine gebrochene Zahl ist/ so ist $r-2nd$ grösser als $rn-2nd$/ das ist/ wenn

der

der strahlende Punct dem Spiegel näher kommet/ so kommet auch das Bild demselben näher.

Der 13. Zusatz.

30. Es werde gleichfals bey einem erhabenen Spiegel die Distantz des strahlenden Punctes nd/ so wird die Weite des Bildes von dem Spiegel $ndr:(2nd+r)$/ das ist/ wenn die Weiten des strahlenden Punctes sich verhalten wie d zu nd; so verhalten sich die Weiten des Bildes von dem erhabenen Spiegel wie $dr:(2d+r)$ zu $ndr:(2nd+r)$/ das ist/ wie $1:(2d+r)$ zu $n:(2nd+r)$ oder wie $2nd+r$ zu $2nd+nr$. Wenn nun n eine gantze Zahl ist/ so ist $2nd+nr$ grösser als $2nd+r$. Derowegen wenn der strahlende Punct von dem Spiegel weggehet/ so gehet auch das Bild zurücke. Hingegen wenn n eine gebrochene Zahl ist/ so ist $2nd+nr$ kleiner als $2nd+r$. Derowegen wenn der strahlende Punct dem Spiegel näher kommet/ so kommet auch das Bild demselben näher.

Die 7. Aufgabe.

31. **Das Gesetze der Natur zu finden/ nach welchem die Strahlen des Lichtes gebrochen werden/ wenn sie aus einem durchsichtigen Cörper in einen anderen dichteren fahren.**

Auf-

Auflösung.

Tab. VII. Fig. 60. Es werde der Strahl AB in B gebrochen und fahre in G. Setzet die Geschwindigkeit/ mit welcher sich der ungebrochene Strahl AB beweget verhalte sich zu der Geschwindigkeit des gebrochenen BG wie m zu n. Derowegen ist die Zeit in welcher die Linie AB durchlauffen wird/ zu der Zeit in welcher das Licht durch die Linie BG kommet wie n BA zu m BG (§. 7). Lasset nun von A und G die Perpendicular-Linien AD und GC fallen und es sey $AD = a$/ $CG = b$/ $CD = c$/ $CB = x$/ so ist $BD = c-x$/ folgends $BG = \sqrt{(xx+bb)}$. $AB = \sqrt{(aa+cc-2cx+xx)}$ und $nBA + m\,GB = n\sqrt{(aa+cc-2cx+xx)}\ m\sqrt{(xx+bb)}$. Weil nun das Licht aus A in G in der geschwindesten Zeit kommen muß/ indem die Natur immer den kürtzesten Weg gehet; so ist $n\sqrt{(aa+cc-2cx+xx)}+m\sqrt{(xx+bb)}$ die kürtzeste Zeit/ in welcher das Licht durch die Refraction aus A in G gelangen kan. Bildet euch demnach eine krumme Linie ein/ in welcher

$$n\sqrt{(aa+cc-2cx-xx)}+m\sqrt{(xx+bb)} = y$$

so ist (§. 416)

$$n(xdx-cdx):\sqrt{(aa+cc-2cx+x^2)}+mxdx:\sqrt{(x^2+b^2)} = dy = 0$$

$$mx:\sqrt{(x^2+b^2)} = n(c-x):\sqrt{(aa+cc-2cx+x^2)}$$

das ist $mCB:BG = nDB:AB$

$$mCB.AB = nBD.BG$$

Se-

Setzet BG = AB/ so ist

$m\,CB = n\,BD$

folgends $m : n = BD : BC$

Wenn ihr nun BG und AB für den Sinum Totum annehmet/ so ist BD der Sinus des Winckels BAD oder ABK/ hingegen BC der Sinus des Winckels BGC oder GBF (§. 92. Geom. §. 3. Trigon.). Und demnach hat der Sinus des Inclinations-Winckels ABK zu dem Sinui des gebrochenen Winckels FBG beständig einerley Verhältnis.

Die 8. Aufgabe.

32. **Den Punct f zufinden/ wo die Strahlen des Lichtes nach geschehener Refraction in dem Glase KL mit der Axe AF vereiniget werden.** Tab. VII. Fig. 61.

Auflösung.

Setzet der Strahl AD sey dem Strahle AB unendlich nahe/ so ist der Winckel A unendlich kleine und die Linie DI/ so mit der Axe einen rechten Winckel in I macht/ stehet auch auf AD perpendicular. Eben so macht GH so wol in G als H einen rechten Winckel. Es sey nun $AD = AB = y$/ $Bc = a$/ $EC = b$/ $BE = f$/ $DF = IF = BF = x$/ $HF = EF = GF = v$/ $Hf = Ef = Gf = z$/ $cP = r$/ $CM = t$/ die Verhältnis der Refraction aus der Luft ins Glaß 3 : 2/ so ist $AC = y + a$ $FC = u + b$/ $Fc = x - a$. Weil nun 3 : 2 =

cP : cQ (§. 31) / so ist $cQ = 2r : 3$. Eben so weil $2 : 3 = CM : CN$ (§. 31) / so ist $cN = 3t : 2$. Weil Bd mit cP parallel / so ist (§. 177 Geom.)

$$\begin{matrix} Ac & : & cP & = & AI & : & ID \\ y+a & & r & & y & & ry:(y+a) \end{matrix}$$

Eben so weil wegen der rechten Winckel bey D und Q die Linien ID und cQ parallel sind / ist (§. 177 Geom.)

$$\begin{matrix} FI & : & ID & = & Fc & : & cQ \\ x & & ry:(y+a) & & x-a & & \tfrac{2}{3}r \end{matrix}$$

$$\tfrac{2}{3}rx = (rxy - ary) : (y+a)$$

$$2rxy + 2arx = 3rxy - 3ary$$

$$3ary = rxy - 2arx$$

$$3ay : (y-2a) = x$$

Wiederumb weil wegen der rechten Winckel bey M und H die Linien CM und GH parallel sind / so ist (§. 177 Geom.)

$$\begin{matrix} FC & : & CM & = & FG & : & GH \\ b+v & & t & & v & & tv:(b+v) \end{matrix}$$

Und endlich weil wegen der rechten Winckel bey N und H die Linien CN und GH parallel sind / so ist (§. 177 Geom.)

$$\begin{matrix} fC & : & CN & = & fG & : & GH \\ b+z & & \tfrac{3}{2}t & & z & & tv:(b+v) \end{matrix}$$

$$\tfrac{3}{2}tz = (btv + tvz) : (b+v)$$

3btz

$$3btz + 3tvz = 2btv + 2tvz$$

$$3bz = 2bv - vz$$

$$3bz:(2b-z) = v = x-s.$$

$$s + 3bz:(2b-z) = x = 3ay:(y-2a)$$

$$2bsy - szy + 2asz - 4abs + 3bz - 6abz = 6aby - 3azy$$

$$3azy + 3bzy + 2asz - szy - 6abz = 6aby + 4abs - 2bsy$$

$$z = \frac{6aby + 4abs - 2bsy}{3ay + 3by + 2as - sy - 6ab} = Ef$$

Wenn ihr die Dicke des Glases nicht regardiret/ so verlieren sich alle Glieder/ die durch s multipliciret sind/ und ihr bekommet $Ef = z = 6aby:(3ay + 3by - 6ab) = 2aby:(ay + by - 2ab)$.

Anmerckung.

33. Unerachtet die gefundene Regel hauptsächlich dienet den Ort des Bildes zufinden/ wenn das Glaß auf beyden Seiten erhaben ist und zwar die Radii der erhabenen Flächen nicht von einerley Grösse sind; so könnet ihr doch daraus gar leichte auch Regeln für alle übrige Fälle herleiten/ wie aus folgenden Zusätzen erhellet.

Der 1. Zusatz.

34. Wenn das Glaß auf beyden Seiten gleich erhaben ist/ so ist cB = CE/ das

ist/ $a = b$ und daher $z = 6a^2y : (6ay - 6a^2) = ay : (y - a)$.

Der 2. Zusatz.

35. Wenn cB oder a unendlich groß wird/ so ist die Seite KBL/ die gegen den strahlenden Punct A gekehret ist/ platt/und die Glieder/ die durch a nicht multipliciret sind/ werden in Ansehung der andern unendlich kleine oder nichts. Daher ist $z = 6aby : (3ay - 6ab) = 2by : (y - 2b)$.

Der 3. Zusatz.

36. Hingegen wenn b unendlich groß wird/ so ist das Glaß auf der hinteren Seite KEL platt und die Glieder/ darinnen b nicht vorhanden/ werden in Ansehung der andern unendlich kleine. Solchergestalt ist $z = 6aby : (3by - 6ab) = 2ay : (y - 2a)$.

Der 4. Zusatz.

37. Also ist es ein Thun/ ob ihr die erhabene oder die platte Fläche eines Glases/ so auf einer Seite erhaben/ auf der andern platt ist/ gegen den strahlenden Punct kehret.

Der 5. Zusatz.

38. Wenn so wol a als b unendlich groß werden/ so wird daß Glaß auf beyden Seiten platt und $3ay + 3by$ werden in Ansehung $6ab$ unendlich kleine. Daher ist $z = 6aby : -6ab = -y$. Also kommen die Strahlen nir-

nirgends zusammen/ als in dem Puncte/ wo sie ausfliessen.

Der 6. Zusatz.

39. Wenn y unendlich groß wird/ so fallen die Strahlen mit der Axe parallel ein/ und daher ist $6ab$ in Ansehung der übrigen Glieder unendlich kleine/ folgends $z = 6aby : (3ay + 3by) = 2ab : (a + b)$ für ein Glaß/ welches auf beyden Seiten auf verschiedene Art erhaben ist.

Der 7. Zusatz.

40. Wenn das Glaß beyderseits auf gleiche Art erhaben ist/ so ist $z = 2aa : 2a = a$.

Der 8. Zusatz.

41. Wenn a unendlich groß wird/ so ist die Seite KBL gegen den strahlenden Punct zu platt/ und b in Ansehung a unendlich kleine. Derowegen ist $z = 2ab : a = 2b$. Hingegen wenn b unendlich groß wird/ so ist die vom strahlenden Puncte A weggekehrte Seite KEL platt/ und a in Ansehung b unendlich kleine. Derowegen ist $z = 2ab : b = 2a$.

Der 9. Zusatz.

42. Wenn ihr für $+b$ in der Regel $-b$ setzet/ so wird das Glaß auf der Seiten KBL gegen den strahlenden Punct A zu hohl/ und $z = -aby : (ay - by + 2ab)$.

Der 10. Zusatz.

43. Setzet $-a$ für $+a$, so wird das Glaß auf der vom strahlenden Puncte weggekehrten Seite hohl und $z = -aby : (by + 2ab - ay)$.

Der 11. Zusatz.

44. Wenn ihr für a und b zugleich $-a$ und $-b$ setzet, so wird das Glaß auf beyden Seiten hohl, und $z = 2aby : (-ay - by - 2ab)$.

Der 12. Zusatz.

45. Wenn a unendlich groß wird und ihr $-b$ für b setzet, so ist das Glaß auf der Seite gegen den strahlenden Punct platt, auf der anderen aber erhaben, und die Grössen, so durch a nicht multipliciret sind, werden in Ansehung der anderen unendlich kleine. Daher ist $z = -2by : (y + 2b)$.

Der 13. Zusatz.

46 Wenn b unendlich groß wird und ihr $-a$ für a setzet, so ist das Glaß auf der Seite gegen den strahlenden Punct zu hohl, auf der andern erhaben, und die Grössen so durch b nicht multipliciret sind, werden in Ansehung der andern unendlich kleine. Daher ist $z = -2ay : (y + 2a)$.

Der 14. Zusatz.

48. Wenn y unendlich groß wird, so fallen die Strahlen parallel ein und daher wird (§. 42) $z = -2aby : (ay - by) = -2ab : (a - b)$, (§. 43) $z = -2aby : (-ay + by) = -2ab : (b - a)$

$=$

= (wenn $a = b$) $-2a^2$ / (§. 44) $z = 2aby : (-ay-by) = 2ab : (-a-b) =$ (wenn $a = b$) $-2a^2$ / (§. 45) $z = -2by : y = -2b$ / (§. 46) $z = -2ay : y = -2a$.

Der 15. Zusatz.

48. Weil in den Hohl-Gläsern die Distantz des Punctes / wo die einfallenden Strahlen mit der Axe vereiniget werden / das Zeichen - hat / so ist klahr / daß derselbe auf der Seite gegen den strahlenden Punct zu gesucht werden muß und dannenhero die Strahlen in dergleichen Gläsern von der Axe weggebrochen werden. Ob aber solches viel oder wenig geschehe / kan aus den gefundenen Regeln geurtheilet werden.

Anmerckung.

49. Aus diesen Exempeln könnet ihr sehen / wie die Algebra mit grossem Vortheile in anderen Wissenschaften angebracht wird / und werde ich bey anderer Gelegenheit noch ein mehreres zeigen / auch in folgendem erinnern / wo ihr mehrere dergleichen Exempel finden könnet.

Ende der Algebra.

Kurtzer
Unterricht
von den
vornehmsten
Mathematischen
Schriften.

Kurtzer Unterricht von den vornehmsten Mathematischen Schrifften.

Das 1. Capitel. Von den Arithmetischen Schrifften.

§. 1.

Die Arithmetischen Schrifften erklähren entweder die Eigenschafften der Zahlen/ oder lehren die verschiedenen Rechnungs-Arten. Diese zeigen entweder zugleich mit den Grund der Rechnungen oder nicht.

§. 2. Die Eigenschafften der Zahlen hat *Euclides* in dem siebenden/ achten und neundten Buche seiner Elementorum beschrieben: nachdem aber die Rechnung mit den Buchstaben erfunden worden / pfleget man diese Lehren in die Algebraische Schrifften zu ziehen / wie in dem dritten Capitel erwiesen wird.

§. 3. Derer Schrifften / darinnen die Rechnungs-Arten schlechterdings gelehret werden/ ist fast keine Zahl. Und kan man alle gar wohl missen/ wenn man die in dem ersten Thei-

Theile befindliche Anfangs-Gründe der Rechen-Kunst inne hat. Daher halte ich mich mit ihrer Erzehlung nicht auf. Denen / die Lust in Krieg haben / zu liebe hat *Clermont* seine *L'Arithmetique Militaire* zu Straßburg 1707. zum andern male heraus gegeben (in 12. Bog. 11. $\frac{1}{2}$) darinnen er die gemeinen Regeln der Rechen-Kunst durch zum Kriege gehörige Exempel erläutert.

§. 4. Der gelehrte Jesuit / Andreas *Tacquet*, hat in seiner *Theoria & praxi Arithmetices* die zu verschiedenen malen heraus kommen / unter andern zu Amsterdam 1704. (in 8. Bog. 34. Tabb. 8) die 3. erwehnten Bücher des *Euclidis* erläutert / und die Rechnungs-Arten zugleich erwiesen / wiewol seine Beweise nicht so leichte und deutlich sind wie diejenigen / welche in meinen Anfangs-Gründen der Rechen kunst zu finden. Daher ich nicht leicht einem Anfänger dieses Buch recommendiren wollte.

§. 5. Der vortreffliche Mathem. in Engelland / weiland Geometriæ Prof. *Savilianus* in Oxfurt / *Joh. Wallisius* hat die Theoriam und Praxin der Rechen-Kunst weitläufftig ausgeführet / und das Rechnen durch Buchstaben mit dem Rechnen durch Zifern verknüpfet / daher auch in seinen Beweisen sich der Buchstaben-Rechen-Kunst bedienet. Es ist zuerst An. 1657. zu Oxfurt in 4. gedruckt worden; aber hernach in den ersten Theil seiner

ner Operum Mathematicorum (Oxoniæ 1695 in fol.) mit hinein gesetzt worden. Weil aber dieses Werck den Anfängern zu schweer ist/ so hat *Eduard Wells* einen kurtzen und leichten Auszug daraus gemacht/ und zu Oxfurt unter dem Titul: *Elementa Arithmeticæ* 1698. in 8. heraus gegeben/ welcher verdienet von Anfängern gelesen zu werden.

§. 6. Samuel *Morland*, ein Engelländer/ hat in seiner Mutter-Sprache zu London 1673 (in 12. Bog. 6½) die Beschreibung zweyer Instrumente heraus gegeben/ durch deren eines man mit blosser Bewegung einiger Scheiben das Addiren und Subtrahiren/ durch das andere aber auf gleiche Art das Multipliciren verrichten kan. Beydes hat er schon 1666. dem Könige *Carl II.* präsentiret. Dieser Beschreibung ist eine völlige Rechen-Kunst mit leichten Beweisen beygefüget. Allein viel vollkommener ist die Machine des Hrn. Geheimden Raths von Leibnitz/ die er vor langen Jahren in seiner Jugend erfunden/ und nun in den Miscellaneis Berolinensibus (Berolini 1710. in 4. p. 394. Tabb. XXX,) der gelehrten Welt mitgetheilet/ dadurch alle Rechnungs-Arten ohne einiges Nachsinnen durch blosse Bewegung mit der Hand verrichtet werden. Vid. part. 3. p. 317. & seqq.

Das 2. Capitel.

Von den Geometrischen Schrifften.

§. 1. Die Geometrischen Schrifften handeln entweder von der blossen Theorie/ oder erklähren die praxin auf dem Papiere und Felde. Die Theoretischen Schrifften erläutern entweder die gemeine Geometrie/ welche von den geraden Linien und dem Circul und denen Figuren und Cörpern handeln/ welche sich durch diese Elemente beschreiben lassen: oder sie gehören zu der höheren Geometrie/ welche die Natur und Eigenschafften der krummen Linien untersuchet. Die Practischen Bücher fügen entweder den Beweiß zu den aufgelöseten Aufgaben/ oder sie lassen ihn weg.

§. 2. Die vollständigste Geometria practica, die ohne Beweiß zur Zeit heraus kommen/ ist die/ welche Mallet in Frantzösischer Sprache beschrieben. Sie bestehet aus 4 Theilen/ und ist zu Paris 1702 in groß Octav gedruckt worden. (Tom. I. 23. Tom. II. 26. Tom. III. 24. Tom. IV. 18. Bogen.). Es sind fast so viel saubere Kupfer in dem Buche als Blätter/ die zur Sache nicht gehören/ und ohne Noth das gar nützliche Buch sehr theuer machen. Das Feldmessen wird sowol mit den Stäben und der Meß-Ruthe/ als mit dem halben Circul/ dem

Geo-

Geometrischen Qvadrate / dem Proportional-Circul / dem Astrolabio, der Boussole, dem Jacobs-Stabe / dem Meß-Tischlein zu verrichten angewiesen.

§. 3. In unserer Teutschen Sprache haben wir **Daniel Schwenters** / weiland Professoris Matheseos zu Altdorf / Geometriæ practicæ Libros IV. welche **Georg Andreas Böckler** mit Anmerckungen vermehret und zu Nürnb. 1667 in 4. drucke lassen / mit vielen Holtzschnitten (4 Alph. 18 Bog.). Die Praxis auf dem Papiere wird gar deutlich und vollständig erklähret; auf dem Felde aber nur der Gebrauch der blossen Stäbe u. Schnure und des Meß-Tischleins angewiesen.

§. 4. Vor ihm hat **Bernhard Cantzler** zum Gebrauch der Feldmesser einen kurtzen und leichten Bericht vom Feld-Messer aufgesetzet: welchen hernach **Abdias Trew** / Mathes. Prof. zu Altdorff mit vielen Anmerckungen vermehret / die zweymal so viel als das Buch selbst austragen / so daß eine völlige Geometria practica daraus worden / die den Liebhabern dieser Wissenschafft ein Genügen thun kan. Das Buch ist in unserer Sprache mit einem Lateinischen Titul: *Summa Geometriæ practicæ* zu Nürnberg 1673 heraus kommen (in 8. Bog. 33. Tabb. 55 und viel Holtzschnitte).

§. 5. Man rühmet auch die l'Ecole

des

des Arpenteurs oder die Feldmesser-Schule/ welche *de la Hire* zu Paris 1689 in 8 heraus gegeben/ ingleichen des *Ozanam* zu Paris 1609 in 8 edirte Methode facile pour arpenter, ou mesurer toutes sortes de superficies & pour toiser exactement. Es verdienet auch ihr Lob des Christoph *Clavii*, eines berühmten Jesuiten zu Bamberg/ *Geometria practica*, die in dem andern Theile seiner Wercke zu finden/ auch vorhin besonders gedruckt worden. Zu den Fortifications-Büchern pflegen gemeiniglich und öffters sehr vollständige Geometriæ practicæ mit angehängt zu werden: wovon an seinem Orte ein mehreres folgen sol.

§. 5. Vom Marckscheiden haben wir die Marckscheide-Kunst oder Geometriam Subterraneam des Herrn *Nicolai* Voigtels Zehendners in der Grafschafft Mansfeld. (Eisleben 1688 in fol. 32. Bogen Tabb. 9.) uñ von dem Proportional-Circul/ dessen Gebrauch *Malles* in seiner Geometrie pratique gar deutlich beschrieben/ und *Galilæus* zu erst erfunden/ hat Nicolaus Goldmann in Teutscher und Lateinischer Sprache einen besonderen Tractat ediret (Lugd. Batav. 1697 in fol. 1. Alph. Tabb. 16) / aus welchem Michael Scheffelt seinen Unterricht von dem Proportional-Circul meistens genommen/ (Ulm 1697 in 4. 18. Bog. Tabb. XII) welcher den Liebhabern dieses Instruments

ments zu recommendiren/ weil der Goldmannische Tractat nicht so leichte zu haben. *Galilæus* selbst hat 1607 sein Instrument zuerst in Italiänischer Sprache beschrieben. Der Titul des Buchs ist: Le Operationi del Compasso Geometrico & militare.

§. 6. Was nun die Theoretischen Schriften betrift/ so hat die gemeine Geometrie unter den Alten *Euclides* beschrieben. Die *Elementa Euclidis* sind von verschiedenen heraus gegeben worden. Den Griechischen Text mit einer Lateinischen Ubersetzung hat uns *David Gregorius*, Professor Astronomiæ Savilianus zu Oxfurt/gegeben unter dem Titul: Ευκλείδου τὰ σωζόμενα, h. e. Euclidis, quæ supersunt omnia (Oxoniæ 1703 fol. 7 Alphab. 17 Bogen). Es haben aber andere die demonstrationes leichter zumachen gesucht als sie bey dem Euclide zu finden. Wer demnach den gantzen Euclidem verlanget/ dem kan die Edition dienen/ welche *Isaac Barrow*, weyland Matheseos Professor zu Cambridge, an selbigem Orte in 8 heraus gegeben/ oder auch des *Christophori Clavii Libri XV Elementorum Euclidis* (Franc. 1654. in 8. Tom. I. 2 Alph. 4 Bog. Tom. II. 1 Alph. 20 Bog.) Wie wol die erstere Edition wegen ihrer Kürtze viel angenehmer ist als die andere/ so wegen des vielen Zusatzes allzu weitläuftig gerathen. Allein weil den Anfängern der gantze Euclides

nichts nutzet; so können sie sich entweder mit den *Elemens d' Euclide* des *Dechales*, oder den *Elementis Geometriæ planæ & solidæ* des Tacquet vergnügen. Die beste Edition von dem ersten ist die / welche wir dem *Ozanam* zu dancken haben (Paris 1709 in Regal 12. Bogen 12. Tabb. 16.) Die beste Edition von dem andern hat uns *Guil. Whiston* Mathes. Prof. zu Cambridge gegeben (Cambridge 1703. 8. Bogen 16 Tabb. 7) denn er hat einige Anmerckungen hinzu gesetzt / darinnen er den Nutzen der Lehren des Euclidis zeiget. Vorhin war die letzte Edition, welche zu Amsterdam 1701 in 8 heraus kam (1. Alph. Tabb. 6.).

§. 7. Weil vielen die Ordnung des Euclidis nicht gefallen / auch viele Lehren überflüßig geschienen; so hat man auf andere Elementa Geometriæ gedacht und haben wir in diesem Stücke sonderlich der Frantzosen Fleiß zu loben. Hierher gehören *les Elemens de Geometrie* des Jesuiten *Ignatii Gastonis Pardies*, die unter seinen Oeuvres de Mathematiques zu finden (A la Haye 1691 in 12) aber auch vorhin besonders etliche mal nachgedruckt (Edit. 4 Hagæ Com. 1690 in 12. 8 Bog.) und von dem Herrn Abt Schmidt / hochberühmten Theolog. Professore in Helmstädt in das Latein übersetzt worden / als er noch die Mathematick

tick und Philosophie zu Jena lehrete. Für andern verdienen auch ein Lob die *Elemens de Geometrie, de Monseigneur le Duc de Bourgogne* (A Trevoux 1705 in Reg. 4. 1 Alph. 7 Bog.) weil darinnen die nöthigen Lehren in einer schönen Ordnung kurtz und deutlich vorgetragen werden. Denn unerachtet die *Elemens* des *Arnaud, Lamy* und *Polynier* fast eben auf diese Art eingerichtet; so sind sie doch viel weitläufftiger. Ich könte auch hier des *Euclidis Reformati* gedencken/ den verwichenes Jahr *Angelus de Marchettis* heraus gegeben (Liburni 1709 in 4. 1 Alph. 10 B.) der *Nouveaux Elemens de Geometrie* des *P. Morgues &c.* wenn mehrere zu nennen nöthig wäre. Ich habe den Kern des *Euclidis* in den Anfangs-Gründen der Geometrie dergestalt vorgetragen/ daß einer ohne Anstoß zu höheren Sachen schreiten kan/ ohne einiges von den bisher genannten Büchern dabey zu lesen.

§. 8. Was in dem *Euclide* von der Circul-Kugel- und Cylinder-Rechnung fehlet/ hat *Archimedes* in seinen 2 Büchern *de Sphæra & Cylindro* und dem Büchlein *de dimensione circuli* ersetzet/ daraus *Tacquet* die nützlichsten Lehren unter dem Titul: *Selecta ex Archimede Theoremata* seinen Elementis Geometriæ beygefüget. Eben dieser *Archimedes* hat uns einige Schrif-

ten in der höheren Geometrie hinterlassen/ nemlich ein Buch *de Spiralibus*, eines *de Conoidibus & Sphæroidibus* und eines *de Quadratura Parabolæ*. Alle seine Wercke nebst den ersten 4 Büchern *Conicorum Apollonii* und den 3 Büchern *Sphæricorum Theodosii* hat *Isaacus Barrovv* mit einigen demonstrationibus nach andern heraus gegeben. (Londini 1675 in 4. Opera Archimedis 24 Bog. Tabb. 13. Apollonii 14 Bog. Tabb. 12; Theodosii 6 Bogen Tabb. 3).

§. 9. Die alten Geometræ betrachteten in der höheren Geometrie meistentheils nur die Sectiones Conicas oder Kegelschnitte/ nemlich die Parabel / Hyperbel und Ellipsin. Von diesen hat *Apollonius Pergæus* 8 Bücher geschrieben. Die ersten vier Bücher *Conicorum Apollonii* sind verschiedene mal heraus kommen. Unter die besten Editiones ist zuzehlen diejenige / welche mit den Commentariis Claudii Richardi, eines Jesuiten/ zu Antwerpen 1655 in fol. das Tagelicht erblicket (Alph. 5 Bog. 19. Tabb. 30.) Das fünfte/ sechste und siebende hat *Joh. Alphonsus Borellus*, in Acad. Pisana Mathes. Professor, aus einem Arabischen MSC. zuerst heraus gegeben und mit Anmerckungen vermehret. (Florentiæ 1661 in fol. 4 Alph. 21 Bogen.). Wir haben mit ehestem aus Engelland eine vollständige Editi-

dition der 8 Bücher des *Apollonii* zuhoffen/ welche zu Oxfurt unter der Presse ist. Der Titul des Werckes ist: *Apollonii Pergæi Conicorum libri octo. Priores quatuor cum Lemmatis Pappi & Commentariis Eutocii Græco-Latini. Græce nunc primum prodeuntes ex MSS. Bodlejanis & Savilianis: posteriorum tres ex collatis diversis MSS. Arabicis in Latinum versi. Octavus autem agnito ejus argumento restitutus. Accedunt Sereni Libri duo de Sectionibus Cylindri & Coni Græco-Latini. Græce jam primum ex Bibliotheca Regia Parisiensi. Opera & studio Edm. Halleji, Geometriæ Professoris Saviliani; fol.* Ehe *Borellus* des *Apollonii* Bücher/ die man vor verlohren hielt/ heraus gab/ hat *Vincentius Viviani* aus der Beschreibung des *Pappi* das fünfte zu restituiren gesucht und seine Arbeit unter dem Titul: *De maximis & minimis Geometrica divinatio in 5um Conicorum Apollonii Pergæi adhuc desideratum* zu Florentz 1659. in fol. den Geometris mitgetheilet. Gleichwie es aber der Ausgang wieß/ daß er in seinem Rathen sehr glücklich war; so trieb ihn dieses an/ eine vor langer Zeit schon angefangene Arbeit fortzusetzen/ und den Verlust/ den die Geometrie an des Aristæi Schriften erlitten/ wieder zuersetzen. Da-

her kam endlich An. 1701 zum Vorschein *De Locis solidis secunda divinatio Geometrica in quinque libros injuria temporum amissos Aristæi senioris Geometræ* (Florentiæ in fol. 3 Alph. 15 Bog. Text/ 2½ Bogen Kupfer und viel Holtzschnitte). Es können aber die Schrifften des *Viviani* denen jenigen dienen/ welche nach Art der alten Geometrarum ihre demonstrationes einrichten wollen: welche Arbeit nicht zu versäumen/ indem sie nicht allein den Verstand exerciret/ sondern man auch aus Betrachtung der Figuren öfters einige Sachen leichter als durch Rechnung haben kan/ gleichwie wir heute zu Tage insgemein durch Rechnung leichter finden/was aus Betrachtung der Figuren durch grosse Umbwege gesucht werden müste/ ja öffters gar nicht zu finden wäre. Was wir sonst von den alten Geometris wissen/ ist aus des *Pappi Collectionibus Mathemeticis* zuholen/ der ihre übrige Erfindungen zusammen gebracht und ihre Schriften erzehlet. Die ersten zwey Bücher hält man vor verlohren: die übrigen aber sind mehr als einmal aufgeleget worden.

§. 10. Wenn einer Lust hat die Eigenschaften der Kegelschnitte nach Art der Alten erwiesen sich bekandt zu machen/ dem wäre kaum zurathen/ daß er sich in die unnütze Weit-

Weitläufftigkeiten des *Apollonii* und seines Commentatoris *Richardi* einliesse; sondern er kan mit grösserem Nutzen des umb die Geometrie wohl verdienten Jesuitens *P. Gregorii a S. Vincentio Opus Geometricum Quadraturæ Circuli & Sectionum Coni* lesen. Denn unerachtet dieses Werck auch sehr weitläufftig ist/ so sind doch seine demonstrationes viel leichter und ist in diesem Wercke zu den neuern Erfindungen ein guter Grund geleget worden. Der unvergleichliche Leibnitz bekennet selbst (in Act. Erud. An. 1691 p. 438) daß ihm bald ein grosses Licht in der höheren Geometrie aufgegangen/ als er nebst des *Hugenii* vortreflichem Wercke *de Horologio Oscillatorio* und des *Dettonvillæi* oder *Pascalii* Briefen den *Gregorium à S. Vincentio* gelesen.

§. 11. Zwar verdienet für dem *Apollonio* der Frantzose/ *Claudius Mydorgius*, gelobet zu werden/ welcher so wol die theoriam, als praxin der Kegelschnitte in einem besonderen Wercke deutlich vorgetragen/ welches 1632/ und also 15 Jahr eher als des *Gregorii a S. Vincentio*, zu Paris in fol. heraus kommen: allein es wird wol das letztere den Preiß vor dem ersten bey allen verständigen behalten. Sonst hat in neueren Zeiten *Ph. de la Hire Sectiones Conicas in 9 libros distributas* denen Liebhabern der

Geometrie mitgetheilet (Parisiis 1685 in fol. 2 Alph. 18 Bogen) / in welchem nicht allein alles / was im *Apollonio* zu finden / sondern auch noch einige andere Sachen auf eine neue Art / jedoch nach der Manier der alten Geometrarum aus der blossen Betrachtung der Figuren / ohne einige Rechnung erwiesen werden.

§. 12. Denen Anfängern würde dieses Werck zu weitläuftig seyn / nicht minder / als die bißher genennten alle. Derowegen hat er 6 Jahre vorher ihnen zu Liebe Elemens des Sections Coniques zu Paris in 12 heraus gegeben / für welche sich auch des *Ozanam Traité des Lignes du premier genre* wohl schicket (A Paris 1687 in 4. 1 Alph. 3 Bogen Tabb. 14). Eben ihnen zu gefalleu hat *Jacobus Milnes* aus dem grossen Wercke des *de la Hire* einen Auszug gemacht / welcher zu Oxfurt 1702 in 8 gedruckt worden unter dem Titul: *Sectionum Conicarum Elementa nova methodo demonstrata* (12 Bogen Text; 19 Bog. Kupfer).

§. 13. Wie man die Kegelschnitte auf einer ebenen Fläche auf verschiedene Art beschreiben kan / hat nach dem *Mydorgio* in dem andern Theile seines vorhin (§. 11) gerühmten Werckes / in einem besonderen *Tractatu de organica Conicarum Sectionum in plano descriptione* (Lugd. Batav. 1646 in 4. 12. Bog.)

Bog.) der berühmte Professor zu Leyden *Franciscus à Schooten* gewiesen / welcher auch mit unter seinen Exercitationibus Mathematicis zu finden.

§. 14. Bißher habe ich einige Autores genennet / welche des *Apollonii* Lehren theils besser als er vorgetragen / theils auch vermehret. Allein es fehlet auch nicht an solchen / welche mit den Erfindungen des *Archimedis* ein gleiches gethan. Johannes Kepler hat in seiner *Nova Stereometria Doliorum Vinariorum, imprimis Austriaci* (Lincii 1615 in fol. plag. 28) hiervon einen Anfang gemacht / darinnen unter andern anzutreffen *Supplementum ad Archimedem de Stereometria figurarum Concoidibus & Sphæroidibus proxime succedentium.* Eben dieses Werck hat er folgendes Jahr von neuem zu Lintz drucken lassen / (in fol. Bog. 28) und hin und wieder verändert / auch umb etwas vermehret. Der Titul des Buches ist: **Auszug aus der uralten Messe-Kunst Archimedis und deroselben neulich in Latein ausgegangener Ergentzung** 2c. Weil er aber nicht mehrere Arten der Cörper betrachtete / als zu der Visier-Kunst dienen können: so wurde *Bonaventura Cavalerius*, aus dem Orden des H. Hieronymi / durch sein Exempel aufgemuntert / noch weiter zu gehen / und den Inhalt mehrerer Cörper zu suchen / als *Archimedes* und

Kepler gethan/ wie er selbst bekennet in der Vorrede zu seiner *Geometria indivisibilibus continuorum nova ratione promota* (Bononiæ 1653 in 4. 3 Alph. 1. Bog.) Gleichwie aber Kepler in Erweisung des Archimedeischen Lehrsatzes (part. 1. theor. 2.)/ daß der Circul sich zum Qvadrate des Diametri wie 11 zu 14 verhalte/ den Circul in lauter Sectores resolviret / deren basis ein unendlich kleiner Theil der Peripherie ist/ und den Triangel in lauter kleine Triangel / die einerley Höhe mit dem grossen haben/ aber einen unendlich kleinen Theil von seiner Grundlinie; so hat er diese Methode zu demonstriren überall gebrauchet/ und unter dem Titul *methodi indivisibilium* bekandt gemacht. Er hätte aber besser gethan/ wenn er die Elemente der Figuren mit dem Kepler für Figuren gehalten hätte/ deren eine dimension eine endliche/ die andere aber eine unendlich kleine Linie ist/ als daß er sie Linien / und die Elemente der Cörper Flächen genennet/ weil dieses vielen ohne Noth Anstoß gegeben.

§. 15. *Evangelista Torricellius*, des Groß-Hertzogs zu Florentz Mathematicus hat sich gleichfals fürgenommen / die Archimedeischen Erfindungen in der Geometrie zu erläutern und zu vermehren. Solches erhellet aus seinen *Operibus Geometricis de Solidis Sphæralibus, de motu, de dimensione Parabolæ, de solido Hyperbolico cum appendicibus*

bus de Cycloide & cochlea (Florentiæ 1644 in 4. 2 Alph.).

§. 16. Der Jesuit *Paulus Guldinus* hat in seinem Wercke *de Centro gravitatis* eine neue Methode angewiesen / den Jnhalt der Figuren und Cörper zu finden / welche *Dechales* in seinem *Mundo Mathematio* (Tom. 2. lib. 11. Geom. pract. f. 124 & sqq.) den Anfängern gar deutlich vorträget. Des *Guldini* Werck ist in 4. Bücher eingetheilet / welche alle zu Wien in fol. gedruckt worden / das erste 1635 (4. Alph. 21 Bog.) das andere / dritte und vierdte 1640 (4 Alph. 14 Bog.) Bey dem ersten Buche ist mit angehänget *Dissertatio Physico-Mathematica de Motu rerum ex mutatione centri gravitatis ipsius proveniente*. Uberdieses findet ihr einen grossen Anhang / darinnen *Tabulæ numerorum quadratorum & Cuborum decies millium* enthalten / und ihre Ausrechnung wie auch ihr Gebrauch deutlich angewiesen wird. Es hat aber *Guldinus* seine Methode nur auf die Cörper und Figuren appliciret / deren Ausmessung aus dem *Euclide*, *Archimede* und Keplern schon vorhin bekandt war.

§. 17. Die Lehre von den krummen Linien hat *Isaacus Barrow* in seinen *Lectionibus Geometricis* sehr erweitert / und viele Eigenschafften / die vorhin nur von einigen Linien erwiesen worden / überhaupt von allen erwiesen. Es sind selbige zugleich mit seinen

Le-

Lectionibus Opticis zu Londen 1674 in 4. gedruckt worden. (Jene haben 21 Bogen Text XIII. Tabb. Kupfer; diese 15 Bogen Text. XIX Tabb. Kupfer.).

§. 18. Nachdem nicht allein die Algebra von dem *Vieta* und *Cartesio* in einen solchen Stand gesetzet worden/ daß man sie mit Nutzen in der Geometrie hat anbringen können; sondern auch der unvergleichliche **Leibnitz** seine Differential- und Integral-Rechnung erfunden/ dadurch die Geheimnisse in der höhern Geometrie ergründet werden: hat auch dieselbe ein gantz anderes Aussehen gewonnen/ als sie vorhin gehabt / und dörffen sich die Anfänger/ wenn sie nur meine Anfangs-Gründe der Geometrie wohl inne haben/ mit Lesung keines einigen von allen den bisher erzehleten Büchern aufhalten. Vielmehr wenn es ihnen ein Ernst ist in der höheren Geometrie etwas rechtes zu thun / müssen sie sich bald auf die Algebra des *Cartesii* und die neuere des Herrn von **Leibnitz** legen/ damit sie die neueren Schrifften der Geometrarum verstehen/ darinnen durch Algebraische Rechnungen alles viel leichter u. vollkomener ausgeführet wird. Von diesen Schriften aber will ich in dem folgenden Capitel reden. Doch muß ich noch erinnern / daß es ihnen sehr dienlich seyn werde/ wenn sie nach diesem entweder den *Gregorium à S. Vincentio*, den *Viviani, de la Hire* oder einen anderen dergleis-

gleichen Autorem lesen/ welcher nach Art der Alten aus Betrachtung der Figuren die Sachen erweiset.

Das 3. Capitel.

Von den Algebraischen Schrifften.

§. 1. Die Alten gebrauchten die Algebra bloß zur Auflösung Arithmetischer Aufgaben/ und hatten keine beqveme Zeichen. Das älteste Buch/ so wir von dieser Materie haben/ ist des *Diophanti*, welcher zu Alexandrien im andern Jahrhunderte nach Christi Geburt gelebet. Er hat zwar 13. Bücher von der Algebra aufgesetzt; allein es sind nur 6. heute zutage vorhanden/ welche *Xylander* aus dem Griechischen in das Lateinische übersetzet/ und hernach *Caspar Bachet* mit seinen *Commentariis* vermehret. Sie sind an. 1575 das erste mal gedruckt worden. *Bachet* hat A. 1621 zu seiner Edition den Griechischen Text mit dazu gesetzt/ und den *Diophantum* besser erklähret/ wo ihn *Xylander* nicht recht verstanden hatte.

§. 2. Ehe aber etwas von dem *Diophanto* heraus kam/ hat *Lucas Paciolus*, oder wie er mit seinem Ordens-Nahmen genennet wird/ *Lucas de Burgo Sancti sepulchri*, ein Minorite/ von Geburt ein Italiener/ A. 1494 zu Venedig ein Buch drucken lassen unter dem Titul: *Summa Arithmeticæ & Geo-*

me-

metriæ proportionumque & proportionalitatum, darinnen er auch in dem achten Buche der Arithmetick mit wenigem die Algebra beschreibet/ wie sie von den Arabern gelehret wurde.

§ 3. Unsere Teutschen haben auch dazu bald lust gehabt/ so gar daß sich auch die Rechen-Meister/ als Adam Riese/ mitt Fleiß darauf geleget. Unter andern hat Michael Stiefel in seiner *Arithmetica integra*, die 1543. zuerst heraus kommen/ in dem dritten Buche die Algebra kurtz erklähret / wiewol er nicht weiter als *Frater Lucas* gegangen. Nemlich alle sind zur selben Zeit nur bey der Auflösung der Qvadratischen Æquationen geblieben/ bis *Scipio Ferreus* ein Italiener/ die Regeln für die Cubischen Æquationen erfunden/ welche insgemein *Regulæ Cardani* genennet werden/ weil sie *Cardanus* in seiner *Arte Magna, quam vulgo Cossam vocant, seu Regulas Algebræ* A. 1545 zuerst publiciret/ und A. 1579 *Raphaël Bombelli* in seiner Algebra / die er Italienisch geschrieben / aus des *Ludovici Ferrariensis* Erfindung angewiesen / wie man die Qvadratoqvatratischen Æquationen durch Hülffe der Cubischen zu zwey qvadratischen reduciren kan: wobey man es auch noch bis auf diese Stunde bewenden lassen.

§. 4. Umb das Jahr Christi 1590 hat *Franciscus Vieta* der Algebra ein neues Licht gegeben/ als er zuerst die Rechnung mit

Buch-

Buchstaben und eine allgemeine Methode aus allen Arithmetischen Æquationen die Wurtzel so gnau zu ziehen / als man verlanget / erfunden. Es hat seine *Opera Mathematica* zusammen *Franciscus à Schooten*, Professor Matheseos in seinem Vaterlande zu Leyden / A. 1646 in fol. daselbst heraus gegeben (6 Alph.) Es gehören hieher 1. *Isagoge in Artem Analyticam*, darinnen die Rechnung mit Buchstaben erklähret wird; 2. *Ad Logisticen speciosam Notæ priores*, darinnē der Nutzen dieser Rechnung in Arithmetischen Exempeln und anderen aus der gemeinen Geometrie gezeiget wird; 3. *Zeteticorum libri quinque*, darinnen allerhand Fragen aus der Rechenkunst und gemeinen Geometrie aufgelöset werden; 4. *De æquationum recognitione & emendatione*, darinnen von der Reduction der Æquationen gehandelt wird; 4. *De numerosa Potestatum ad Exegesin Resolutione*, darinnen die allgemeine Regel gegebē wird aus allen Arithmetischen Æquationen die Wurtzel zu ziehen.

§. 5. Die Art mit Buchstaben zu rechnen / wie sie von dem *Vieta* erfunden worden / hat *Guilielmus Oughtred*, ein Engelländer in seinem *Clavi Mathematicæ* behalten / nur daß er die Dignitäten kürtzer zu bezeichnen angewiesen. Dieses Buch ist das erste mal 1631. heraus kommen / aber A. 1693 zu Oxfurt das fünffte mal mit einigen andern seinen

nen Schrifften wieder aufgeleget wurden. Er appliciret die Regeln auf allerhand Exempel/ und zeiget/ wie durch die Buchstabe-Rechen-Kunst in der gemeinen Geometrie Lehrsätze zu erfinden und Aufgaben aufzulösen sind. Er handelt auch nach dem Exempel des *Vietæ* von Ausziehung der Wurtzel aus allen Arithmetischen Æquationen so nahe/ als man verlanget. (Meine Edition von An. 1693. bestehet aus 12 Bogen.).

§. 6. *Thomas Harriot*, auch ein Engelländer/ welcher A. 1621 zu Londen gestorben/ hat *Artis Analyticæ Praxin ad æquationes Algebraicas novas, expedita & generali methodo resolvendas* geschrieben/ welche *Waltherus Warner* ohne seinen Namen zu melden A. 1631 in fol. zu Londen herausgegeben (2. Alph. 2 Bog.) Darinnen hat er die Rechnung des *Vietæ* sehr erleichtert/ und zuerst in diese Forme gebracht/ die sie bis auf gegenwärtige Stunde hat. Er hat nemlich nicht allein die kleinen Buchstaben an stat der grossen eingeführet/ sondern (welches das Hauptwerck ist) die Multiplication durch verknüpfung der Buchstaben ohne Zeichen und die Zeichnung der Dignitäten durch *a*/ *aa*/ *aaa*/ *&c.* oder $a. a^2. a^3$ &c. zuerst eingeführet. Uber dieses hat er auch den Ursprung der Æquationen durch die Multiplication und ihre daraus fliessende Eigenschafften zu erst gelehret. Mit einem Worte

Worte er hat die Regeln der Algebrä in den Zustand gesetzet/ wie wir sie jetzt haben; aber auf keine Exempel weder in der Arithmetick/ noch Geometrie appliciret.

§. 7. *Cartesius* gab An. 1637 zu erst seine *Geometrie* in Frantzösischer Sprache heraus/ welche hernach von dem *Francisco à Schooten* in die Lateinische Sprache übersetzt und mit weitläufftigen Commentariis vermehret/ auch mehr als einmal von neuem wieder aufgeleget worden. In derselben hat er die Algebra völlig behalten/wie sie bey dem *Harriot* zufinden/ unerachtet er seiner nicht im geringsten gedencket/ und gleichwie vor ihm *Oughtred* in seinem *Clavi Mathematicæ* (§. 5) und *Marinus Ghetaldus* in seinen 5 Büchern *de Reselutione & Compositione Mathematica* (Romæ 1630 in fol. 2 Alph. 15 Bogen) die Vietæische Rechnung auf die gemeine Geometrie appliciret und die Qvadratischen Æquationen Geometrisch construiret; so hat *Cartesius* die Harriotische auch in der höheren angebracht und auch die höheren Æquationen/ sonderlich die Cubischen und Biqvadratischen durch die Parabel und einen Circul zu construiren angewiesen: für welche zwey letztere eine allgemeine Regel in allen Fällen (denn nach des Cartesii Regel muß das andere Glied in der Æquation fehlen/ oder erst weggenommen werden) *Thomas Baker* in seinem *Cla-*

ui Geometrica catholica, der in Lateinischer und Englischer Sprache zu Londen 1784 in 4 heraus kommen (1 Alph. 10 Bogen Tabb. X.) angiebet. Allein das wahre Fundament der Geometrischen Constructionen durch Verknüpfung zweyer Geometrischen Oerter hat *Renatus Slusius* in dem andern Theile seines *Mesolabi* (welches das andere mal mit dem andern Theile und vielen Miscellaneis zu Lüttig 1668 in 4 heraus kommen (24 Bogen) gezeiget. In seinen Miscallaneis hat er die Analysin speciosam oder neuere Algebra auf die Qvadraturen der krummen Linien/ auf die Fragen de Maximis & Minimis, auf die Methode den Wendungs-Punct zufinden/ auf den Methodum centrobayricam *Guldini* &c. appliciret/ dergleichen Arbeit auch andere/ als *Fermatius* in seinen *Operibus Mathematicis* (Tolosæ 1679 in fol.) und *Robervall* in den *divers Ouvrages de Mathematique & de Physique par Mr. de l' Academie Royale des Sciences*, ingleichen *Barrow* in seinen *Lectionibus Geometricis* mit Ruhm verrichtet.

§. 8. Bißher habe ich von denjenigen geredet/ welche die gemeine Algebra zu verbessern sich angelegen seyn lassen. Nun muß ich auch von solchen Büchern reden/ welche die Erfindungen anderer zu Nutzen der Anfänger deutlich erklähret. *Johannes Ker-*

sey, ein Engelländer / hat *Elementa Algebræ* in Englischer Sprache zu London 1671 in fol. heraus gegeben / welche wegen ihrer sonderbahren Deutlichkeit wohl verdieneten / daß sie in die Lateinische Sprache zu mehrerem Gebrauch übersetzt und von neuem aufgeleget würden. Man hat zwar vor weniger Zeit vorgegeben / als wenn der berühmte *Halley* sie von neuem mit einigen Zusätzen heraus geben wolte; aber es scheinet / als wenn man die Hofnung fast solte sincken lassen.

§. 9. Die Regeln der gemeinen Algebra ht ohne Exempel *Gerard Kinchuysen* gar deutlich erklähret in seiner *Algebra ofte Stel-Konst* (Haerlem 1661 in 4. 14 Bog.) In seinem *Grondt der Meetkonst*, *ofte Verklaringe der Keegel-Sneeden* (Haerlem 1684 in 4. 12 Bog.) hat er die vornehmsten Eigenschaften der Kegelschnitte durch die Algebraische Rechnung erwiesen / und in seiner *Geometria ofte Meet-Konst* (Haerlem 1663 in 4. 22 Bogen) hat er allerhand Geometrische Aufgaben aus der gemeinen und höheren Geometrie aufgelöset und artige Constructiones davon gegeben / auch in dem Anhange die Geometrischen Constructionen der Cubischen Æquationen erläutert. Diese Schriften verdienen von den Liebhabern der gemeinen Algebra gelesen zu werden. Was sein Landsman

Abraham de Graaf in dieser Sache rühmliches verrichtet/ sol unten beygebracht werden. Sonst rühmet man auch wegen der vielen Exempel des *Jacob Wessenaer Stelkonst*.

§. 10. Was *Kersey* unter den Engelländern gethan/ hat *Jean Prestet* bey den Frantzosen zu verrichten sich vorgenommen/ und zwar in der andern Edition seiner *Nouveaux Elemens de Mathematique* (A Paris 1694 in 4. Tom. I. 3 Alph. 8 Bogen Tom. II. 2 Alph. 18 Bog.) in welchem Wercke er nicht allein alle Regeln/ die bisher in der gemeinen Algebra erfunden worden/ weitläufftig erklähret/ sondern auch alle zur Mathesi universali, oder vielmehr der Arithmeticæ Theoreticæ gehörige Lehrsätze und Aufgaben durch die Algebraische Rechnung ausführet/ und zugleich alle Aufgaben des *Diophanti* und *Vietæ* nach der neueren Art des *Harriot* und *Cartesii* auflöset. Allein der Application der Algebra auf die Geometrie enthält er sich gantz und gar. Es verdienet aber dieses Buch hauptsächlich umb der Diophantischen Aufgaben willen fleißig gelesen zu werden/ weil sie in der höheren Analysi des Herrn von Leibnitz mehr Nutzen haben als man sich insgemein einbildet: wie der Herr von Leibnitz selbst (in Actis Erudit. Lipſ. An. 1702 p. 219) errinnert und augenscheinlich erweiset. Doch

weil

weil der Autor wegen allzu vieler Weitläufftigkeit den Anfängern verdrüßlich fället/ so hat ihnen zum besten/ der durch verschiedene Schriften bekandte und mit einem guten Verstande begabte Prêtre de l' Oratoire in Franckreich/ *Bernhard Lamy*, nach seiner Art/ einen sehr deutlichen Auszug daraus gemacht/ welcher unter dem Titul: *Elemens de Mathematique* in Franckreich und Holland zu verschiedenen malen heraus kommen. Die letzte Pariser-Edition von 1704 in Reg. 12 (1 Alph. 7 Bog.) ist vermehrter als die anderen und nachdem in Holland wieder nachgedruckt worden. Allein zu den Diophantischen Rechnungen findet man in diesem Buche keine Anweisung.

§. 17. Wer nicht allein in der Harriotischen/ sondern zugleich der Diophantischen Rechnung sich mit Fleiß üben wil; dem kan/ nachdem er entweder den *Lamy*, oder den ersten Theil meiner Anfangs-Gründe der Algebra durchstudiret/ *Ozanam* in seinen *Noveaux Elemens d' Algebre*; (A Amsterdam 1703 in Reg. 8. 1. Alph. 21 Bog.) ein völliges Genügen thun. Ich recommendire vorher den *Lamy* oder ein anderes gleichgültiges Buch zu lesen/ weil der erste Theil aus lauter Regeln bestehet/ ohne einige Application, damit ein Anfänger überhäuffet und verdrüßlich gemacht wird. Es fehlet diesem

Buche die Application der Algebra auf die Geometrie/ welche er in dem andern Theile zu zeigen versprochen/ der aber zur Zeit nicht heraus kommen. Doch ist dieser Abgang einiger Massen dadurch ersetzet/ daß der Autor schon vorhin 1687 mit dem *Traité des lignes du premier genre* (§. 12 c. 12) zugleich seinen *Traité des Lieux Geometriques* (8 B. Tabb. 12) und *Traité de la construction des Equations* (12 Bog. Tabb. 9.) heraus gegeben. Diese beyden Tractate verdienen wegen ihrer sonderbahren Deutligkeit für allen andern in dieser Materie gelesen zu werden. Und nimmet mich Wunder/ warumb man dieselben in Holland nicht nachgedruckt/ da man sonst alle übrigen Wercke dieses gelehrten Mannes daselbst von neuem aufgeleget. Es hat zwey Tractate von gleichem Nahmen auch *de la Hire* zu den oben angeführten *Elemens des Sections Coniques* angehänget/ die gleichfals ihr Lob verdienen.

§. 12. Da aber aus gedachten Tractaten die Liebhaber der Algebra nur erkennen / wie man die Algebraischen Æquationen nach dem Exempel des vortreflichen *Slusii* durch Verknüpfung der Geometrischen Oerter construirẽ kan/ keinesweges aber sich in Auflösung Geometrischer Exempel durch die Algebra zu üben Gelegenheit bekommen: so können sie auch in diesem Stücke völlig vergnüget werden/ wenn sie die *Arithmeticam universalem*

ver-

versalem des vortrefflichen *Newton* (Cantabrigiæ 1707 in 8. 1. Alphab.) durchgehen/ darinnen sie nicht allein einen ziemlichen Vorrath auserlesener Exempel/ sondern auch einige neue Regeln finden/ die sie anders wo vergebens suchen. Es hat aber diese Elementa Algebræ ohne des Autoris und seinen Nahmen *Guil. Whiston*, Matheseos Professor Lucasianus in Cambridge, zum gemeinen Nutzen zum Drucke befördert.

§. 12. Die Ausziehung der Wurtzel aus allen Arithmetischen Æquationen hat *Josephus Raphson* in seiner *Analysi Æquationum Universali*, welche zum andern male mit seinem *Conamine Metaphysico de Spatio reali seu ente infinito* zu Londen 1702 oder vielmehr 1697 in 4. gedruckt worden/ (die Analysis bestehet aus 7/ der andere Tractat aus 13 Bogen)/ ziemlich erleichtert. Es können aber seine Regeln alle aus der 113 Aufgabe des ersten Theiles der Algebra (§. 322) hergeleitet werden/ und sind (§. 323 & sqq.) einige Exempel davon verhanden. Allein nach dem *de Lagny* in seinen *Noveaux Elemens d' Algebre* für die Ausziehung der Wurtzel aus den Cubischen Æquationen und denen von dem fünfften Grade eine viel leichtere Regel erfunden/ hat *Halley* dieselbe in den *Transactionibus Anglicanis* allgemein gemacht/ und haben die Hallejanische allgemeine Methode/ *Wells* in seinen *Elementis Arithmeticæ*, *Whiston* in dem An-

hange zu den *Elementis Algebræ Newtoni* und ich (§. 328 & sqq. Algebr.) erkläret.

§. 13. In dem *Traité d'Algebre*, welchen *Rolle*, ein Mitglied der Königl. Academie der Wissenschafft/ zu Paris 1790 in 4. (12 Bog.) herausgegeben/ sind einige gute Regeln / sonderlich für die Ausziehung der Wurtzeln. Allein es ist verdrießlich / daß dieser Mann so sehr affectiret alles neu zu machen/ und andere Erfindungen zu verkleinern/ wie theils aus dem Journal des Sçavans, theils aus der Histoire de l' Academie des Sciences bekandt ist/ und daher auch in diesem Buche lauter ungewöhnliche Wörter brauchet.

§. Die Application der gemeinen Algebra auf die höhere Geometrie kan man aus keinem Buche besser erlernen/ als aus des *Marquis de l' Hospital Traité Analytique des Sections Coniques & de leur usage pour la Resolution des Equations dans les Problemes tant déterminez qu' indéterminez* (A Paris 1707. 2 Alphab. 12½ Bog. Tabb. XXXII) : welches Buch allen denen zu recommendiren/ welche in der Mathematick etwas rechtschaffenes zuthun gedencken. Eben dergleichen Arbeit hat *Guisnée* verrichtet/ welche er zu Paris An. 1705 in 4. unter dem Titul: *Application de l' Algebre a la Geometrie*, heraus gegeben/ darinnen gleichfals die Geometrische

sche Constructionen durch Verknüpfung der Geometrischen Oerter deutlich erkläret und zugleich zu dem Ende die vornehmsten Eigenschaften der Kegelschnitte durch Algebraische Rechnungen eruiret werden. Und ist dieses Buch so geschrieben / daß sich die Anfänger darinnen leicht zurechte finden / wenn sie nemlich die gemeine Geometrie und die Algebraischen Rechnungen wohl verstehen.

§. 15. Die Application der Algebra auf solche Fragen/ davon man keine gewisse Erkäntnis haben/ sondern nur etwas muthmassen kan/ hat nach dem Exempel des *Pascal* und *Hugenii*, deren jener in seinem *Triangle Arithmetique* 1654/ dieser zu Ende der *Exercitationum Geometricarum Schootenii* einige Aufgaben von dem Fortgange des Spieles aufgelöset / *Remond de Monmort* in seinem *Essay d' Analyse sur les jeux de hazard* (A Paris 1708. 1 Alph. 4 Bog.) gezeiget: welches Buch nur umb des willen zulesen/ weil dergleichen Fragen gantz besondere Analytische Kunstgriffe erfordern. Wenn aber des seeligen Herrn *Jacobi Bernoulli Ars Conjectandi* heraus kommen wird/ darauf sein Vetter in den Leipziger-Actis (Supplem. Tom. IV. Sect. 4. p. 159.) nahe Hofnung macht; so wird man noch mehrere dergleichen Kunstgriffe lernen/

 und

und zugleich die Algebra auf politische Fragen appliciret sehen.

§. 16. Des Herrn Johann Christoph Sturms *Mathesis Enucleata* (Norimberg. 1695 in 8. 1 Alph. Text/ 7 Bogen Kupfer) ist bekandt gnung. Allein wie ich nicht in Abrede bin/ daß man aus diesem Buche die vornehmste Lehrsätze der gemeinen Geometrie/ die ersten Regeln der Algebraischen Rechnung/ auch einige zur höheren Geometrie gehörige Lehrsätze und etwas von der Auflösung Algebraischer Aufgaben lernen kan; so kan ich doch auch nicht läugnen/ daß man in eben der Zeit/ da dieses Buch durchstudiret wird/ nicht allein alles/ was in demselben stehet/ viel leichter; sondern auch noch über dieses viel mehrere und eben so nöthige Sachen lernen kan. Ich wil jetzt eben nicht sagen/ daß solches durch meine Anfangs-Gründe der Geometrie und Algebra geschehen könne/ ob wol jedermann leicht zugeben wird/ daß wer sie gelesen und verstanden / nicht mehr nöthig hat nach gedachtem Buche zu fragen; sondern nur raison von meinem Urtheile geben. Da er die gewöhnlichen theoremata oder gemeine Geometrie fast zu lauter Corollariis machet/ und man doch alles dasjenige sich gedencken muß/ was andere in ihren demonstrationibus beybringen; so wird es den Anfängern sehr beschwerlich/ theils die ausser der Ordnung gesetzten præmis-

missas in Gedancken ordentlich zu setzen/ theils die ausgelassenen zu suppliren. Die *Arithmetica Surdorum* ist nicht allein sehr mangelhafft/ sondern nachdem der Herr von Leibnitz schon lange Jahre vorher gezeiget hatte/ wie man die Irrational-Grössen als Rational-Grössen in allen Rechnungen tractiren könne; so erwehlet der Autor aus den vorhin üblichen Regeln die allerbeschwerlichsten/ und gedencket dieser so nützlichen Verbesserung nicht mit einem Worte. In der höheren Geometrie gedencket er nicht einmal des Haupt-Werckes/ nemlich wie die krummen Linien durch Algebraische Æquationen exprimiret/ und daraus ihre Eigenschafften eruiret werden/ da er doch durch Application der Algebra auf die Geometrie des *Cartesii Geometriam* illustriren will. Daher geschiehet es auch/ daß er nicht das geringste von den Geometrischen Oertern errinnert. Was er durch die *Arithmeticam infinitorum* mit grosser Mühe demonstriret/ hätte er durch die viele Jahre vorher von dem Hn. von Leibnitz publicirte/ und von dem berühmten *Jacob Bernoulli* mit deutlichen Exempeln in den Leipziger-Actis illustrirte Differential- und Integral-Rechnung nur spielende/ ja leichter als einen von allen Lehrsätzen des andern Buches erweisen können. An stat der weitläufftigen Inductionum, dadurch er einige propositiones Arithmeticæ

infinitorum erweisen wil / hätte er unendliche derselben auf einmal durch die gemeine Algebraische Rechnung erweisen können. In der Algebra selbst gehet er nicht weiter als *Fr. Lucas*, der am ersten davon schrieb / als noch fast nichts darinnen gethan war. Und bey den Geometrischen Constructionibus hat er das wahre Fundament derselben/ welches *Slusius* entdecket/ und schon *de la Hire* und *Ozanam* deutlich gnung erläutert hatten/ gar nicht berühret. Von andern Dingen wil ich ietzt nicht reden. Bey diesen Umständen wundere ich mich jetzund nicht mehr/ daß/ wie ich dieses Buch anderen deutlich erklähren konte/ ich doch gantz ungeschickt war die Mathematischen Schrifften der neueren zu verstehen. Dieses schreibe ich nur zu dem Ende/ damit unsere Teutsche Jugend/ die zu einer gründlichen Mathematischen Wissenschafft lust hat / sich nicht mit diesem Buch aufhalten lasse/ so gut gewesen wäre / wenn die Haupt-Erfindungen des verwichenen Seculi noch nicht vorhanden wären / und niemand einen leichten Weg zu ihnen gebähnet hätte.

§. 17. Es haben sich auch einige gefunden/ welche die Regeln der gemeinen Algebra tadeln wollen/ als wenn sie nicht in allem ihre Richtigkeit hätten. Hieher gehöret *Ægidius Franciscus de Gottignes*, aus Brüssel bürtig/ ein Jesuit/ in seiner *Logistica Universali*

sali (Neap. 1687. in fol. 5 Alph. 14 Bog. Tabb. V.). Dergleichen hat auch *Hugo de Omerique* in seiner *Analysi Geometrica* (Gadibus 1698) gethan / wie ich mich besinne in den *Transactionibus Anglicanis* gelesen zu haben. Allein die guten Leute thun nichts mehr als daß sie durch Umbwege suchen / wozu man gerades Weges gelangen kan / und dadurch den Fortgang der Wissenschafften aufhalten.

§. 18. *Johannes Wallisius* bemühete sich die von dem Kepler zu Erläuterung des *Archimedis* vorgebrachte und dem *Cavalerio* glücklich gebrauchte Methode die Figuren und Cörper in unendlich kleine Elemente zu solviren / mit der Algebraischen Rechnung zu vereinigen / und gab zu dem Ende A. 1655 seine *Arithmeticam infinitorum* heraus / darinnen er unendliche Reihen Geometrischer Progreßionen zu summiren / und ihre Verhältnis gegeneinander zu finden anwieß / umb die Qvadraturen der Figuren und Cubaturen der Cörper dadurch zu finden. Jetzund treffen wir sie in dem ersten Theile seiner Mathematischen Wercke f. 365 & sqq. an. Weil aber *Wallisius* sich mit der Induction vergnügete (dergleichen Beweiß den Mathematischen Wissenschafften unanständig ist) / so bemühete sich *Ismael Bullialdus*, wiewol durch viele Umwege / nach Art der alten Geometrarum, aus der Natur der

Zah-

Zahlen und Progreßionen die *Arithmeticam infinitorum* zu demonstriren/ wie aus seinem *Opere Novo ad Arithmeticam infinitorum libris 6 comprehensum* (Parisiis 1682 in fol. 4 Alph. 16 Bog.) mit mehrerem zu ersehen.

§. 19. Allein *Wallisius* und *Bullialdus*, der ihm folgete/ waren nicht auf den rechten Weg gerathen. Hingegen der scharffsinnige Leibnitz konte denselben nicht verfehlen/ als er sich nach ihm umbsahe. Denn als er sich A. 1674/75 und 76 zu Paris aufhielt/ und bey müßigen Stunden auf die höhere Geometrie und andere Mathematische Wissenschafften gedachte; gerieth er auf seine unvergleichliche Differential- und Integral-Rechnung/ auf welche auch der gröste Geometra in Engelland/ *Isaacus Newton* zu eben selbiger Zeit vor sich kam. Denn als diese beyde grosse Männer von Geometrischen Sachen mit einander in Briefen conferirten/ schrieb unter andern *Newton* vom 24 Oct. 1676. *Inversa de Tangentibus problemata sunt in potestate aliaque illis difficiliora : ad quæ solvenda usus sum duplici methodo; una concinniori, altera generaliori. Utramque visum est in præsentia litteris transpositis consignare --:* 5accd 10ffh *&c.* welche Buchstaben/ wenn sie in ihre rechte Ordnung gebracht werden/ diesen Verstand haben: *Una me-*

tho-

thodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione simul involvente fluxionem ejus: altera tantum in assumtione seriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua cetera commode derivari possunt & in collatione terminorum homologorum æquationis resultantis ademenidos terminos assumtæ seriei. Und der Herr von Leibnitz überschrieb in seinem Briefe vom 21. Jun. seine Differential-Rechnung selbst: wie nicht allein aus den beyden Briefen zu ersehen, die in dem dritten Theile der Mathematischen Wercke des *Wallisii* (f. 634. 648) zufinden; sondern auch *Newton* selbst aufrichtig bekennet in Principiis Philosophiæ Naturalis Mathematicis schol. Lemnat. 2. lib. 2 p. 253. 254. Er hat aber seine Rechnung erst An. 1684 in den Leipziger Actis p. 467 und *Newton* A. 1687 in dem jetztangezogenen Buche der gelehrten Welt bekandt gemacht: hingegen die beyden Herren *Bernoulli* haben durch herrliche Aufgabe dieselbe illustriren und weiter perflectioniren helffen.

§. 20. Der *Marquis de l' Hospital* welcher von dem Hn. *Joh. Bernoulli*, jetzund berühmten Professore Mathematum in Basel, die Differential- und Integral-Rechnung des Herrn von Leibnitz erlernet, hat zu erst in seiner *Analyse des infiniment* (A Paris 1696 in Reg. 4. 1 Alph. 2 Bog. Tabb. 11)

die

die Differential-Rechnung deutlich beschrieben und ihren vortreflichen Nutzen in der höheren Geometrie gezeiget. Dieses Werck verdienet mit Bedacht gelesen zu werden/ wenn man zu höheren Dingen Lust hat. Er war zwar willens noch einen Theil heraus zu geben/darinnen er die Integral-Rechnung auf gleiche Weise erläutern wolte: allein weil er von dem Herrn von Leibnitz vernahm/ daß er selbst gesonnen wäre eine *Scientiam infiniti* heraus zu geben/ so wolte er lieber seine Arbeit unterlassen/ als dadurch die gelehrte Welt eines herrlicheren Werckes berauben.

§. 21. Da der Herr von Leibnitz durch viele wichtige Geschäffte bißher abgehalten worden/ mit seinem sinnreichen Wercke die gelehrte Welt zuerfreuen/dessen Vortreflichkeit aus den herrlichen Speciminibus abzunehmen/ die in den Leipziger-Actis A. 1702 p. 210 & seqq. und An. 1703 p. 19 & seqq. gelesen werden; wollte *Carré* in seiner *Methode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion & d' oscillation par l' application du Calcul integral* (A Paris 1700 in Reg. 4. 15 Bog. Tabb. IV) den Verlust einiger massen ersetzen/ den wir in Ermangelung des anderen Theiles von der Analyse des infiniment petits erlitten. Ob er nun aber gleich nur die ersten

sten Buchstaben der Integral-Rechnung gelehret; so ist man ihm doch deswegen viel Danck schuldig/ daß er den Anfängern dazu den Weg gebahnet.

§. 22. Etwas weiter als er gieng *Georgius Cheynæus* in seinem *Methodo inversa Fluxionum* (denn so nennen die Engelländer die Integral-Rechnung)/ welchen er zu London 1703 in Reg. 4 drucken ließ (6 Bogen). In diesem Buche erklähret er hauptsächlich/ was *Newton* und der Herr von Leibnitz von den unendliche Reihen erfunden/ wiewol zu der Zeit da *Cheynæus* schrieb/ der Herr von Leibnitz viel höhere Dinge hiervon publicirte. Vid. Acta Lipsiens. loc. cit. Nachdem nemlich *Nicolaus Mercator*, ein Holsteiner/ in seiner *Logarithmotechnia* prop. 17. p. 31. seqq. (Lond. 1668 in 4. mit des *Michaëlis Angeli Riccii Exercitatione Geometrica*, die zu erst in Rom heraus kommen) die Qvadratur der Hyperbel durch eine unendliche Reihe exprimirte und dadurch zeigte/ wie man die Brüche durch die Division in unendliche Reihen reduciren sollte/ so erfandt *Newton* noch eine andere Methode durch Ausziehung der Wurtzel aus Irrational-Grössen unendliche Reihen zuerfinden/ und der Herr von Leibnitz erdachte/ wie man aus einer angenommenen undeterminirten Reihe eine andere/ darinnen die coëfficien-

tes determiniret sind/ finden solle: wie beydes aus ihren Briefen erhellet/ die in dem dritten Theile der *Operum Wallisii* f. 622. 629 zufinden. *David Gregorius* in seiner *Exercitatione Geometrica de dimensione figurarum* (Edinburgi 1684 in 4) hat die Methodos des *Mercatoris* und *Newtonis* durch viele Exempel illustriret/die zum Theil sein Vetter *Jacobus Gregorius* ausgerechnet hatte/ wie er p. 2. 3 & 4 erinnert/ dessen Buch *de Vera Circuli & Hyperbolæ Quadratura* (Patav iæ 1668 in 4) mit dem angehängten *Geometriæ parte universali, quantitatum curvarū transmutationi inserviente* zeiget/ was man sich hierinnen von ihm hätte versprechen können/ wenn nicht der Todt sein Vorhaben gehindert hätte. *Johannes Craige*, ein Schottländer/braucht in seinem *Methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehensarum Quadraturas determinandi* (Londini 1685 in 4. 6 Bogen Tab. I.) und in seinem *Tractatu de figurarum curvilinearum Quadraturis & Locis Geometricis* (Londini 1693. in 4. 11 Bogen Tab. I.) auch unter weilen die unendlichen Reihen; allein so wol *Gregorius* als *Craige* gehen im Qvadriren durch Umwege/ weil sie dazumal die Integral-Rechnung noch nicht verstanden. Des *Craigii Methodus generalis de Locis Geometricis* ist von dem *Marquis de l' Hospital* in seinen

Se-

Sections Coniques (§. 14) deutlicher ausgeführet worden.

§. 23. Niemand hat zur Zeit die Integral-Rechnung ausführlicher abgehandelt als *Gabriel Manfredius*, in seinem Wercke *de Constructione Æquationum differentialium primi gradus*, (Bononiæ 1707 in 4. 1 Alph. 2 Bog. Tabb. VII) darinnen er die Methoden erklähret / welche in den Exempeln der vortreflichsten Mathematicorum unserer Zeiten / die hauptsächlich in den Leipziger-Actis hin und wieder anzutreffen / verborgen liegen. Dannenhero dieses Buch denen dienet / welche mit leichter Mühe den Methodum Tangentium inversam wollen verstehen und gebrauchen lernen.

§. 24. Alles / was in des *Marquis de l' Hospital Analyse des infiniment petits*, dem *Carré*, *Cheynæo*, *Gregorio* und *Cragio* anzutreffen / hat *Charles Hayes* in seinem *Traitise of Fluxions, or introduction to Mathematical and Mechanical Philosophy*, auch zugleich viele nützliche Aufgaben / die in den Leipziger-Actis zufinden, illustriret / absonderlich dasjenige was der Herr von Leibnitz von den Ursachen der himmlischen Bewegungen angegeben. Es ist zu Londen 1704 in fol. heraus kommen / und bestehet aus 3 Alph. 3 Bog.

§. 25. Es hat zwar *Bernhardus Nieuwentiit* in seinen *Considerationibus circa Analyseos ad quantitates infinite parvas applicatæ principia & calculi differentialis usum in resolvendis problematibus Geometricis* (Amstel. 1694 in 8. 3 Bogen) und in seinen *Considerationibus secundis circa calculi differentialis principia* (Amstel. 1696 in 8. 3 Bog.) wieder die Differential-Rechnung einige Einwürffe gemacht/ und daher eine andere Methode in seiner *Analysi infinitorum* (Amstelod. 1695 in 8. 20 Bog. Tabb. XXI) angewiesen/ dadurch eben dieses verrichtet werden sol/ was man durch die Differential- und Integral-Rechnung gethan: allein es haben nicht allein aus dem/ was der Herr von **Leibnitz** und der Herr *Bernoulli* in den Leipziger Actis An. 1695 p. 310 & seqq. it. p. 369 & seqq. & A. 1697 p. 125 & seqq. und der Herr *Jacob Hermann*, in seiner *Responsione ad Cl. Viri Bernhardi Nieuwentiit Considerationes secundas circa calculi differentialis principia editas* (Basileæ 1700 in 8. 4 Bog.) überflüßig erwiesen/ daß sie alle keinen Grund haben/ sondern man kan auch von ihm urtheilen/ was ich oben (§. 17) von denen angemercket/ welche in den Anfangs-Gründen der gemeinen Algebra ohne Noth Schwierigkeiten gesucht. Sonst wissen

ver-

verständige auch die Analysin infinitorum des *Nieuwentiit* noch zugebrauchen.

§. 26. Der vortrefliche Mathematicus *Johannes Wallis* hat zu erst An. 1685 in Englischer/ hernach vermehrter in Lateinischer Sprache einen *Tractatum Historicum & Practicum de Algebra* publiciret/ welcher den grösten Theil von dem andern *Volumine Operum Mathematicorum* ausmacht. Gleichwie er aber/ was in der gemeinen Algebra gethan worden/ weitläuftig ausführet; so hat er hingegen von der Differential- und Integral-Rechnung gar nichts/ ausser daß er nur mit wenigem zwey problemata beschreibet f. 391 & seqq. deren *Newton* in dem oben angeführten Briefe an den Herrn von Leibnitz gedencket. Denn da die erste Edition heraus kam/ war noch wenig von der Differential- und Integral-Rechnung bekandt. Was aber nach der Zeit/ sonderlich in den Leipziger Actis davon zum Vorscheine kommen/ hat er nicht erfahren/ weil er in seinem hohen Alter nicht mehr alle Bücher lesen können/ wie er sich selbst damit in einem Briefe an den Herrn von Leibnitz entschuldiget. Vid. Acta Erudit. Lips. An. 254. Dannenhero/ ist dieses Werck nur von denen zugebrauchen/ welche nachdem sie die Algebra verstehen/ erkennen wollen/ was nach und nach in derselben gethan worden/ und wie öfters durch verschiedene Wege man

ein Ziel erreichet habe. Dergleichen Betrachtungen aber sind denen sehr dienlich/ welche die Kräfte des menschlichen Verstandes erkennen zulernen bemühet sind.

§. 27. *Charles Reyneau* hat in seiner *Analyse demonstreé* (A Paris 1708 in Reg. 4. 5 Alph. 7 B. 5 Tabb.) alle Methoden weitläuftig erklähret / die bisher so wol in der gemeinen Algebra/ als der Differential- und Integral-Rechnung des Herrn von Leibnitz erfunden worden. Allein weil er mit Exempeln sehr sparsam ist; so muß kein Anfänger sich über dieses Buch machen. Hingegen wenn einer meine Anfangs-Gründe der Algebra recht inne hat/ kan er sonder grosse Mühe und nicht ohne Nutzen dieses Werck durchgehen/ das ein jeder Liebhaber der Algebra sich zu legen sol.

§. 28. Die gantze Mathesin puram mit der neuen und alten Algebra findet man in *W. Jones Synopsi Palmarionem Matheseos or, New Introduction to the Mathematicks containing the principles of Arithmetic and Geometry demonstrated &c.* In den ersten zur Arithmetic mit Zifern und Buchstaben gehörigen Sachen ist der Autor so deutlich/ daß er es nicht deutlicher hätte machen können. Allein da er in solgenden alles durch characteres exprimiret/ so wird er sonderlich in der Geometrie für Anfänger unterweilen allzukurtz. Wer aber

der nur mercket/ daß in dergleichen Büchern jede Zeile mit Nachdencken und in richtiger Ordnung gelesen werden muß; wird auch darein sich leicht finden lernen. Es kan aber dieses Buch den Lehrenden dienen/ wenn sie den Anfängern etwas erklähren wollen; hingegen wenn diese auch aus andern Büchern die Sachen gelernet/ können sie die Synopsin palmariorum Matheseos zur Repetition brauchen.

§. 29. Wer die Application der Algebra/ sonderlich der neueren/ erkennen wil/ auch sich immer mehr und mehr in derselben zu perfectioniren gedencket; hat Ursache die *Acta Erudit.* und *Histoire de l' Academie des Sciences* mit ihren *Memoires*, ingleichen die *Miscellanea Berolinensia* zu lesen/ wiewol auch die *Transactiones Anglicanæ* und das *Journal des Sçavans*, dazu etwas beytragen können. Die vornehmsten Algebraischen Erfindungen/ die in den Transactionibus Anglicanis enthalten/ treffet ihr in den beyden ersten Theilen der *Miscellaneorem Curiosorum, being a collection of some of the principal phænomena in Natur &c.* an/ welche von Wort zu Wort aus ihnen genommen. Der erste Theil ist zu Londen 1705/ der andere 1706 in Reg. 8. heraus kommen. (Tom. I. 1 Alph. Tabb. V. Tom. II. 1 Alphab. 2 Bogen Tabb. VIII.).

Das 4. Capitel.
Von den Trigonometrischen Schrifften.

§. 1. Mit dem / was ich in der Trigonometrie gelehret / kan man überall auskommen / wo man Trigonometrische Rechnungen nöthig hat. Derowegen ist wohl kaum nöthig / daß ich viel von Trigonometrischen Schrifften rede.

§. 2. Doch damit ich etwas gedencke / so errinnere ich / daß *Joh. Regiomontanus* (eigentlich Müller genannt) zuerst ein Buch von den Triangeln A. 1464 in öffentlichen Druck befördert. Das erste Buch aber / welches in dieser Materie kurtz / deutlich und doch ausführlich geschrieben worden / ist des *Philippi Lansbergii Geometria Triangulorum*, die er A. 1591 zuerst heraus gegeben. Es ist aber nachmals dieselbe zu Middelburg in Seeland 1663 in fol. vermehrter aufgelegt worden / bestehet aus 11 Bogen und stehet zu Anfange seiner Operum. In der Trigonometria Sphærica bin ich ihm meistens nachgefolget / weil er selbe fast gantz und gar aus den *Elementis Euclidis* deduciret / da man bey andern viele Lehrsätze aus des *Theodosii Libris Sphæricorum* (§. 8. c. 2) zum Grunde legen muß.

§. 3. Mit ihm kommet in vielen Stücken *Bartholomæus Pitiscus* überein/ in seinen *libris quinque Trigonometriæ*, die zuerst A. 1599/ hernach vermehrter zum dritten mal zu Franckfurt 1612 in 4. (2 Alph. 15 Bog.) heraus kommen. Dieses Buch ist nicht allein umb des willen zu loben/ weil die *constructio Tabularum, Sinuum & Tangentium* deutlich vorgetragen / und die Auflösungen der Trigonometrischen Aufgaben geschickt erklähret werden ; sondern auch wegen des durch 11 Bücher zertheileten grossen Vorraths von allerhand Aufgaben aus der Geometria practica, Fortification/ Geographie / Gnomonick und Astronomie/ die durch die Trigonometrie aufgelöset werden; wiewol in meinen Anfangs-Gründen mehr Application als in diesem Buche zu finden.

§. 4. Zu Ende des ersten Theiles der *Operum Mathematicorum* findet man des *Johannis Caswell Trigonometriam planam & Sphæricam*. Die Beweise sind auf eine neue Art eingerichtet / aber nicht für Anfänger.

§. 5. Viel besser ist für sie des *P. Jacobi Gooden*, eines Jesuiten *Trigonometria plana & Sphærica* (Leodii 1704 in 8. 12½ B.) darinne beyde Trigonometrien gründlich erklähret/ und mit nützlichen Aufgaben aus der Geometrie/ Astronomie und Geographie erläutert werden.

§. 6. Man findet auch die Regeln beyder Trigonometrie bey den gewöhnlichen *Tabulis Sinuum & Tangentium, itemque Logarithmorum*, welche vielfältig heraus kommen. Man lobet die Edition des *Vlacq* und *Ozanam*. Wenn man die Logarithmos Sinuum & Tangentium auch für Secunden verlanget; so kan des *Adriani Vlacci Trigonometria artificialis* dazu dienen (Goudæ 1633 in fol. 5 Alph. 3. Bog.).

§. 7. In einigen *Cursibus Mathematicis* ist die Trigonometrie sehr wohl erklähret; ingleichen hat man sie einigen Astronomien præmittiret: wovon unten an seinem Orte geredet werden sol.

Das 5. Capitel.
Von den Architectonischen Schrifften.

§. 1. Aus dem Alterthume sind uns allein *Vitruvii* zehen Bücher von der Bau-Kunst übrig geblieben/ in welchen er alles / was zur Baukunst gehöret/ ausführlich zu lehren sich bemühet. Die beste lateinische Edition ist des *de Laët* welche zu Amsterdam 1649 in f. mit den Anmerckungen des *Guil. Philandri, Danielis Barbari* und *Claudii Salmasii*, dem *Lexico Vitruviano Bernhardini Baldi*, den *Elementis Architecturæ Henrici Wottoni* &c. zum Vorschein kommen.

§. 2. Man tadelt aber an dem sonst so ruhmwürdigem Wercke des *Vitruvii*, daß

er

er keine gute Ordnung gehalten/ sondern alles untereinander geworffen ; überaus unverständlich geschrieben/ nemlich nach dem Urtheile des *Alberti* (lib. 6. c. 1. de re ædificatoria pag. 80 & seq.) den Griechen Lateinisch/ und den Lateinern Griechisch; und viel überflüßiges mit eingemischet.

§. 3. Den ersten und dritten Fehler hat *Perrault* gehoben/ als er nach dem Rathe des *Philibert de l'Orme* in seiner *Architecture generale de Vitruve reduite en Abregé* (Amstel. 1681 in 8. 16 ½ Bogen Text/ 1½ Kupfer) die Lehren des *Vitruvii* in eine accurate Ordnung gebracht / die durch das gantze Werck hin und wieder zerstreuet sind.

§. 4. Den dunckelen Text des *Vitruvii* hat D. *Gualt. H. Rivius* durch seine Teutsche Ubersetzung/ und die jedem Capitel beygefügte Auslegung verständlich gemacht. Es ist sein übersetzter *Vitruvius* das letzte mal zu Basel 1614 in fol. heraus kommen (7 Alph. 2 Bog. mit vielen Figuren) / aber nach dem Exempel des *Vitruvii* viel überflüßiges mit eingemenget. Derowegen ist in diesem Stücke die Frantzösische Ubersetzung des *Perrault*, die Anfangs 1673/ hernach 1684 vermehrter und hin und wieder verändert/ mit auserlesenen Anmerckungen und ausbündig schönen Kupffern unter dem Titul : *Lex dix Livres d'Architecture de Vitruve*

ve zu Paris in Reg. fol. gedruckt worden (4. Alph. 5 Bog.).

§. 5. Weil aber *Vitruvius* die Lehre von den 5. Ordnungen/ welche von einigen für das Hauptwerck in der Baukunst gehalten wird/ nicht vollständig abgehandelt; wie denn auch zu seiner Zeit die Römische Ordnung noch nicht erfunden war; so hat wohlgedachter *Perrault* ein herrliches Werck von den 5 Ordnungen der Bau-Kunst/ unter dem Titul: *Ordonnance des cinq especes de Colonnes selon la methode des anciens*, zu Paris 1684 in fol. herausgegeben/ darinnen er die Vorurtheile der Baumeister gewaltig bestreitet.

§. 6. Lange nach dem *Vitruvio* hat *Leo Baptista de Albertis* gelebet/ dessen *Libri de re ædificatoria decem* zu Paris 1512 gedruckt worden (2 Alph. in 4). Er hat sich angelegen seyn lassen die Regeln der Baukunst zusammen zu tragen; aber die wichtige Lehre von den 5 Ordnungen gar schlecht abgehandelt. Zwar wolte er dem *Vitruvio* seinen Ruhm abjagen; aber es ist ihm nicht gelungen. Es ist dieses Buch auch 1585. zu Florentz lateinisch/ und 1665 zu Venedig Italienisch in 4. heraus kommen: ja vorhin 1553 ins Frantzösische übersetzt worden.

§. 7. Bald nach ihm haben *Sebastian Serli* und *Andreas Palladio* zu einer Zeit gelebet. Jener hat 7/ dieser 4 Bücher von

der

der Baukunst geschrieben. Die ersten 5 Bücher des *Serlii* sind Italienisch zu Venedig 1601 in fol. Teutsch zu Basel 1609 in f. gedruckt worden (4 Alph. 13 Bog.). Er handelt nur von allerhand Gebäuden und Architectonischen Wercken/ und den 5 Ordnungen. Die Grund-Regeln hat er weggelassen/ sonder zweifel weil er sie aus dem *Vitruvio* supponiret/ den er so hoch gehalten/ daß es ihm unrecht geschienen im geringsten von ihm abzuweichen. Vid. lib. 3. fol. 46. edit. Venet. Das sechste Buch von den Wohnungs-Gebäuden ist nicht zum Vorschein kommen. Das siebende von den Häusern auf dem Lande hat *Jacobus Strada* Lateinisch und Italienisch zu Franckfurt 1575 in fol. drucken lassen.

§. 8. *Palladius* hat den Ruhm / daß er es allen andern Baumeistern in den 5 Ordnungen zuvor gethan / und seinen Wercken ein prächtiges Ansehen giebet. In seinem ersten Buche ist eine vollständige Anweisung zur Baukunst enthalten. In den übrigen wird von allerhand Arten der Gebäude und anderen Architectonischen Wercken gehandelt. Er hat ordentlich und deutlich geschrieben. Daher er auch für andern den Anfängern der Baukunst zu recommendiren. Alle 5 Bücher sind Italienisch A. 1575 in fol. gedruckt worden. Die ersten zwey hat Georg Andreas Böckler in das Teutsche über-

übersetzt/ und mit vielen Anmerckungen zu Nürnberg 1689 in fol. (1 Alph. 3 Bog. Tab. 88) auflegen lassen.

§. 8. Der Abt *Philibertus de Lorme*, Caroli des IX. Rath / Eleemosinarius und Baumeister hat A. 1567 zu Paris 9 Bücher von der Bau-Kunst in Frantzösischer Sprache in fol. heraus gegeben. Es sind viel nützliche Regeln/ sonderlich von den Gewölbern/ darinnen zu finden/ die man anderswo vergebens suchet. Er war zu seiner Zeit so berühmt/ daß man ihn auch ausser Franckreich Königliche und Fürstliche Palläste angeben ließ. Er mischet aber wie *Vitruvius* und *Alberti* viel Dinge mit ein/ die zur Sache nicht gehören.

§. 9. *Jacob Barozzio Vignola* hat 1631 in Italienischer Sprache ein Werck von den 5 Ordnungen heraus gegeben. Weil er aber sehr kurtz geschrieben / hat es *Daviler* in seiner Frantzösischen Ubersetzuug mit weitläufftigen Commentariis vermehret/ in welchen die gantze Baukunst erläutert wird. Das Werck ist unter dem Titul: *Cours d' Architecture, qui comprend les Ordres de Vignole, avec des Commentaires, les figures & descriptions des plus beaux batimens & de ceux de Michel Angel* &c. zu Paris heraus kommen / und zu Amsterdam 1694 in 4 (3 Alph. 20 Bogen Tabb. 13. 6 Bog.). Der Herr Prof.

Sturm

Sturm hat dieses Buch in das Teutsche übersetzet/ und mit einigen Anmerckungen vermehret/ das Lexicon aber/ daraus der gröste Theil des Buches bestehet/ weggelassen/ auch noch 3½ Bogen Figuren dazu gemacht. (Amstel. 1699. in 4. 2 Alph.).

§. 10. *Vincentius Scamozzi* hat 1615 zu Venedig unter dem Titul: *L' Idea della Architettura Universale* das erste/ andere/ dritte/ sechste und siebende Buch seiner Bau-Kunst in fol. drucken lassen. Das sechste und dritte ist ins Teutsche übersetzt worden/ und unter dem Titul: **Klährliche Beschreibung der fünff Säulen-Ordnungen und der gantzen Bau-Kunst** zu Nürnberg 1697 in fol. nachgedruckt worden. (2. Alph. 6. Bog. Tabb. 85.). Man rühmet ihn/ daß er sich wohl auf die Proportion verstanden. Allein er hat verwirret geschrieben/ und wird einer die Baukunst aus ihm nicht lernen.

§. 11. *Carolus Philippus Dieussart* hat in seinem in Teutscher Sprache herausgegebenem *Theatro Architecturæ Civilis* (Bamberg 1697 in Reg. fol. 1 Alph. 3 Bog. Tabb. LXV) nicht allein die zur Baukunst nöthigen Regeln gegeben; sondern auch die 5 Ordnungen nach dem *Palladio, Vignola, Scamozzi, Pietro Cataneo, Sebastian Serlio, Branca* untereinander verglichen: dergleichen Arbeit vor ihm *Rol. Freard de*

Cham-

Chambray (A Paris 1650 in fol.) verrichtet.

§. 12. **Blondell** hat A. 1698 seinen *Cours d' Architecture* in 5 Theilen zu Paris in Regal fol. drucken lassen/ davon schon etwas A. 1675 heraus kommen war (8 Alph. 14 B. Tabb. XXIV und sehr viel eingedruckte Kupfer). In dem ersten Theile erläutert er die 5 Ordnungen nach dem *Vitruvio*, *Vignola*, *Palladio*, *Scamozzi*; in den übrigen handelt er meistens von dem Gebrauch der Ordnungen aus aller berühmten Baumeister Schriften.

§. 13. Es dienen auch zu Erläuterung der fünf Ordnungen des *Antoine Desgodetz Edifices antiques de Rome* A Paris 1697 in fol. 3 Alph. 17 Bog. mit ausbündig schönen eingedruckten Kupfern): ingleichen **Joh. Balthasar Lauterbachs** *Abregé d' Architecture* (Amst. 1699 in 8. 2 Bog. Tabb. XVIII). Er hat die leichteste Manier die Ordnungen zu zeichnen/ und zwar auf eine neue Art angewiesen.

§. 14. **Nicolaus Goldmann**/ ein Breßlauer/ hat in seinem *Tractatu de Stylometris* oder dem Gebrauche der Baustäbe (Lugd. Bat. 1661 in fol. Lat. & Germ. 9. Bog. Tabb. XL) Instrumente beschrieben/ dadurch man die 5 Ordnungen überaus leichte beschreiben kan/ und die Ordnungen selbst in grössere perfection gesetzt/ als vor ihm nie geschehen. In seiner **Vollständigen** Anwei-

weisung zu der *Civil*-Bau-Kunst/ welche der Herr Sturm zu Wolffenbüttel 1696 in Reg. fol. (2 Alph. 4 Bog. Tabb. 74) wie eben diese Lehre von Ordnungen vorgetragen/ und ihr Gebrauch gezeiget/ über dieses aber auch alles übrige mit Fleiß zusammen getragen/ was in den Schriften des *Vitruvii* der berühmten Italiänischen Baumeister und dem Commentario des *Vilalpandi* über den Propheten Ezechiel hin und wieder zerstreuet zufinden. Er hat Anfangs die Kunst-Wörter erklähret/ und ihnen einige allgemeine Regeln von der Festigkeit/ Beqvemlichkeit/ und Zierlichkeit des Gebäudes beygefüget: keines Weges aber wie die Mathematici aus diesen vorhergesetzten Gründen das folgende demonstriret. Daher muß man sich nicht einbilden/ als wenn er sein Buch nach der Mathematischen Lehr-Art eingerichtet/ und die Regln der Bau-Kunst/ wie in Wissenschaften gebräuchlich/ demonstriret hätte. Es ist aber sonst dieses Buch das beste unter allen: wiewol zum Gebrauch der Ungelehrten viel dienlicher wäre/ wenn man ein kürtzeres und vollständigeres in besserer Ordnung aufsetzte/ zumal da die Kürtze der Deutlichkeit nichts benehmen würde. Es hat aber auch schon der Herr Sturm An. 1699 in der ersten Ausübung der Civil-Bau-Kunst des Goldmanns viel ersetzet/ was ihm an nö-

thigen Materien abgehet. In diesen Anmerckungen thut er zugleich einen Vorschlag von einer sechsten Ordnung/ die aber zur Zeit noch nicht angenommen worden. (1 Alph. 14 Bogen Tab. XIX).

§. 15. Wer die zur Zimmer-Kunst gehörige Sachen erkennen wil/ damit er lerne/ wie geschickte Verbindungen des Holtzwerckes zuerhalten; kan sich aus **Johann Wilhelms** *Architectura Civili* oder **Beschreibung und Vorreissung vieler vornehmer Dachwerck** &c. (Nürnberg in fol. 5. Bog. Tab. LXXIV. in 2 Theilen) und **Johann Vogels** Modernen Baukunst (Hamburg 1707 in fol. 3 Bog. Tabb. 36) Raths erholen.

§. 16. Zu dem Wasserbaue sind gute Bücher *L' Arte di restituire à Roma la tralasciata Navigatione del suo Tevere* des *Cornelii* **Meyers**/ eines Holländers/ (in Roma 1685 in fol. 2 Alph. 3 Bog. mit vielen eingedruckten Kupfern): seine *Nuovi ritrovamenti* (in Roma 1689 in fol. 8 Bog. mit vielen Kupfern) und ein anderes Buch/ so von eben diesem Autore zu Rom 1696 in fol. (12 Bog. mit vielen Kupfern) gedruckt worden. Hieher gehöret auch des *Joh. Baptistæ Baratteri Architectura d' Acque* (Piacenza 1656 in fol. 3 Alphab. 6 Bog.). Aus dem ersten Buche hat ein ungenannter Frantzose einen angenehmen

Auszug gemacht und ihn als sein eigenes Werck unter dem Titul: *Traité des moyens de rendre les Rivieres navigables* zu Amsterdam in 8. heraus gegeben (Amsterdam 1696 in Reg. 8. 6 Bog. Tabb. XII).

§. 17. Endlich muß ich auch des Herrn *des Argues* Kunstrichtig- und Probmäßige Zeichnung zum Steinhauen in der Bau-Kunst rühmen/ darinnen die schöne Erfindung der Frantzosen die Steine nach Geometrischen Gründen zu allen Arten der Bogen und Gewölber zu hauen deutlich vorgestellet wird. Die Teutsche Ubersetzung aus dem Frantzösischen ist zu Nürnberg 1699 in 8 gedruckt worden. (15 Bog. Tabb. 114).

Das 5. Capitel.

Von der Artillerie/ oder Pyrotechnie.

§. 1. Unter unseren Teutschen/ die sich auf Feuerwercke verstehen/ werden *Casimirus Simienowitz*, ein Pohle/ Johann Sigismund Buchner und Ernst Braun im Werth gehalten. Des ersten vollkommene Büchsenmeisterey-Kunst ist mit dem andern Theile von Daniel Ellrichen vermehret worden und zu Franckf. am Mayn in fol. heraus kommen (3 Alph. 20 Bogen Tabb. 43). Des Buchners Artillerie ist zu Nürnberg 1685 in fol. (2 Alphab. 18

Bog. Tabb. 53) und des Braunens zu Dantzig 1687 in fol. (2 Alph. 16 Bog. Tabb. 60) gedruckt worden. Es handeln aber diese Autores nicht allein vom Pulver und dem Geschütze; sondern auch von allen Lust- und Ernst-Feuerwercken: von welchen Materien zusammen ein kurtzer / doch deutlicher Begriff / in **Georg Andreä Böcklers** drittem und vierdtem Theile des *Manualis Architecturæ Militaris* oder **Hand-Büchleins über die Fortification** zufinden (Franckf. und Leipzig 1689 in 16. Tom. III. 4 Bogen Tabb. XI. Tom. IV. 10 Bogen Tabb. XXXIV).

§. 2. **Michael Mieth** hat in seiner Geschütz-Beschreibung zwar das Geschütze mit dem Pulver und seinem Gebrauche rühmlich beschrieben; allein von anderen Feuer-Wercken nichts beygebracht (3 Alph. 10 Bog. Tab. LX).

§. 3. Dergleichen Arbeit ist fast *La Forge de Vulcain, ou l' Appareil des Machines de Guerre*, die der *Chevalier de Saint Julien* (A la Haye 1706 in Regal 8. 10 Bog.) heraus gegeben / nur daß / wie leichte zu erachten / nicht alles so weitläuftig wie dort ausgeführet wird / sondern der Autor sich bemühet junge Leute die einige Erkäntnis von der Artillerie zuwissen verlangen / nicht aber Artillerie-Bediente und Stück-Giesser

zu

zu unterrichten: wozu das Miethens Werck dienlich.

§. 4. Alles was nur von Geschütze/ dessen man sich im Kriege bedienet/ erfunden worden/ hat sehr accurat beschrieben und vorgezeichnet *Surirey de Saint Remy* in seinen *Memoires d' Artillerie.* Die beste Edition ist zu Paris 1707 in Reg. 4 (4 Alph. 17 Bogen Tabb. 196) heraus kommen und vermehrter als die andern.

§. 5. Absonderlich ist denen/ welche gerne was kurtzes und gutes von der Artillerie haben wollen/ der gründliche Unterricht von der Artillerie zu recommendiren/ der zu Hamburg 1699 in 8. aus dem Holländischen übersetzt worden (10 Bog. Tabb. 6¼ Bog.) und den berühmten *Cœhorn* zu seinem Autore hat.

§. 6. Man kan auch hieher des *Blondell L'Art de jetter les Bombes* (A Paris 1683 in 4) ziehen/ welche ins Teutsche übersetzt zu Sultzbach 1686 in 8. gedruckt worden/ und die einige Schrifft in dieser Materie ist/ die Mathematisch ausgeführet worden. Ingleichen muß hier des *Lamberti Lambion* Bau-*Practica* nicht vergessen werden (Wien 1696 in 8. mit verschiedenen Kupfern) darinnen ausführlicher als anderswo von den Minen gehandelt wird.

Das 6. Capitel.
Von der Fortification.

§. 1. Die Fortificatations-Schrifften enthalten entweder ihrer Autorum eigene Erfindungen in sich/ oder sind zum Unterrichte derjenigen geschrieben/ welche die Fortification lernen wollen. Von beyden wil ich nur die vornehmsten erzehlen.

§. 2. Anfangs hielte man die Holländische Fortification für so vollkomen/ daß nichts daran zu verbessern stünde. Dieselbe hat **Freytag** ihr Erfinder/ und nach ihm haben sie viele andere beschrieben/ wird auch fast in allen Anweisungen zur Fortification nicht unbillig zuerst erklähret/ weil sie zu den neueren Erfindungen Anlaß gegeben/ und diese durch sie desto leichter verstanden werden. **Melder** differiret von **Freytagen** nur in der Proportion der Linien/ und *Antoine de Ville* kommet in den Haupt-Maximen auch mit ihm überein.

§. 3. Der erste Verbesserer der Freytagischen Manier ist der Herr Graf von **Pagan** gewesen/ welcher A. 1645 seine Manier zu fortificiren bekandt gemacht. Es ist anfangs Frantzösisch zu Paris 1645 in fol. unter dem Titul: *Les Fortifications de M. le Comte de Pagan* (1 Alph. 6 Bog. Tabb. XI) heraus kommen/ und hernach auch in unsre Teutsche Sprache übersetzt worden. Mit dieser kommet in dem meisten die überein/ welche **Heinrich Ruße Baron von Russenstein** entworffen/ und **Melder** mit seinen weit-

weitläufftigen Anmerckungen zu Osnabrück in fol. herausgegeben (43 Bog. Text und 16 Bog. Kupfer.).

§. 4. Etwas weiter gehet **Blondells** Manier von ihr ab/ welche viel schöne Maximen in sich begreiffet/ aber allzu kostbahr ist. Es ist seine *Nouvelle maniere de fortifier les places* anfangs zu Paris 1686 in Reg. 12. (5. Bog. Text/ Tabb. XII) gedruckt/ und nachdem auch in Haage 1686 in 8. nachgedruckt worden.

§. 5. *Vauban* hat zweyerley Manieren zu fortificiren ersonnen/ die ich beyde in meinen Anfangs-Gründen beschrieben. Er selbst hat niemals etwas davon entworffen: aber verschiedene andere haben sie publiciret. Für die beste Edition hält man diejenige/ welche wir dem Abte *du Fay* zu dancken haben/ weil sie *Vauban* selbst approbiret. Sie ist unter dem Titul *La Veritable maniere de bien fortifier de M. Vauban* zu Amsterdam 1692 in 12. gedruckt worden (9 Bog. mit einigen Kupfern). Der Herr Professor Sturm hat in seinem *Veritable Vauban* (A La Haye 1709 in Reg. 8. 14 Bogen Tabb. 31) beyde Manieren wohl beschrieben/ auch die Fundamental-Regeln der Fortification zugleich erzehlet/ und nach Gewohnheit eine *Arithmeticam* und *Geometriam practicam* præmittiret/ daß allso die Anfänger dieses Buch wohl nutzen können.

§. 6. *Cœhorn* hat seine Manier zu befestigen in Holländischer Sprache 1685 zu Leeuwarden in fol. publiciret (45 Bog. Tabb. XIV). Nach diesem ist sie ins Frantzösische übersetzt worden/ und unter dem Titul: *Nouvelle Fortification tant pour un terrain bas & humide, que Sec & elevé* zu Hage 1706 in Reg. 8 (19 Bog. Tabb. XIV.) heraus kommen.

§. 7. Unter unseren Teutschen ist **Bernhardt Scheithers Neuvermehrte und verstärckte Vestungs-Bau-und Krieges-Schule** bekandt/ die zu Braunschweig 1672 in fol. gedruckt worden (1 Alph. 7. B. Tabb. XXIV in Reg. fol.). Als **Christian Neubauer** das folgende Jahr darauf in seinen zu Cölln an der Spree gedruckten **wohlmeinenden Gedancken oder Discurs über ausgegangene Fortification des Tit. Hrn. Joh. Bernhard Scheitern** wieder dieselbe schrieb/ und seine neue Invention ihr entgegen setzte; gab **Scheither** A. 1677 zu Straßburg in fol. sein *Examen Fortificatorium* heraus/ darinnen er die **Neubaurische** Invention verwirffet/ seine alte vertheidiget/ und noch eine andere neue hinzu setzt (1 Alph. 2 Bog. Tabb. VIII). **Neubauer** hat A. 1679 in seiner *Vera praxi Arthitecturæ Militaris* oder gründlichen Beschreibung der neu-inventirten Invention (Stargard 1679 in fol. 19 B. T. VIII). wieder darauf geantwortet.

§. 8. Der Herr **Ernst Friedrich von Borgsdorff** hat in seiner unüberwindlichen Festung (Ulm 1682 in 8. 7 Bog. Tabb. VIII.) allerhand gute Maximen/ welche verdienen gelesen zu werden. Eben so verdienet Joh. **Jac. Werdmüllers Probier-Stein der** *Ingenieures* (Franc. 16 Bog. mit einigen Kupfern) wegen der guten Maximen / die bey ihm anzutreffen/recommendiret zu werden. Eben von der Art ist seine *Apologia Fortificatoria* (Franc. 1691 in f. 1 Alph. 15 Bogen Tabb. XVI). Der Hr. von Borgsdorff aber hat noch einen andere Tractat unter dem Titul: **Die befestigte Stütze eines Fürstenthums/ oder neuerfundene Defension wieder das sonst Welt-bezwingende Canoniren / Bombardiren und Miniren**/ zu Nürnberg 1687 in 8 (8 Bogen mit einigen Kupfern) heraus gegeben.

§. 9. Kein Buch hat grösser Auffsehen gemacht als **George Rimplers** befestigte Festung (Franc. 12. 16 Bog.) darinnen er gantz eine andere Beschaffenheit der Festungen erfordert/ als alle bisher erbauete und inventirte Festungen haben. Er hat selbst hiervon keinen Riß gegeben. Niemand aber hat sich mehr angelegen seyn lassen solches zu præstiren als der Herr **Sturm** in seiner **Entdeckung der unstreitig allerbesten Manier zu befestigen** (Franckf. an der Oder 1704 in 8. 12 Bog. Tabb. IX).

§. 10. **Christoph Heeres** *Theoria & praxis Artis muniendi*, oder Kunstmäßige Handgriffe und Anweisung der vierfachen Fortification/ nach welcher heute zu Tage die Festnngen in Europa erbauet zu werden pflegen (Franckf. 1689 in 4. 16 Bog. Tabb. XXX) ist wegen seiner artigen Manieren die Festungen zu zeichnen/ und der Beschreibung des würcklichen Baues der Festung mit Fleiß zu lesen. In seinem *Speculo Artis Muniendi* oder helleuchtendem Fortifications - Spiegel (Leipzig 1694 in 4. 17 Bog. Tabb. XXXI). hat er gleichfals besondere Constructiones und beschreibet einige vornehme Festungen in Europa.

§. 11 **Daniel Speckle**/ ein Baumeister in Straßburg/ hat schon A. 1589 eine *Architecturam* von Festungen in fol. (2 Alph. 10 Bog. Tabb. XXXVI) ausgehen lassen; allein er hat so viel vortrefliche Sachen in seinem Wercke/ daß er noch heut zu Tage überall in sonderbahrer Hochachtung ist. Daher hat man es auch A. 1705 zu Dreßden von neuem in fol. auflegen lassen. Man findet viel darinnen/ so man anderswo vergebens suchet.

§. 12. Ich könte auch noch **Wilhelm** *Dilichii Peribologiam* oder **Bericht von Vestungs-Gebäuen** anführen/ welche zu Franckfurt am Mäyn 1640 in fol. gedruckt wor-

worden (2 Alph. 2 Bog. Tabb. 409 oder 9 Alph. 11 Bog.) / weil Verständige viele zur praxi gehörige Dinge daraus nehmen können. Er hat auch eine Krieges-Schule geschrieben/ die zu Franckf. am Mäyn 1689 in fol. heraus kommen (10 Alph. 13 Bog. mit einer grossen Menge Kupfer und eingedruckten Figuren). Darinnen wird alles zum Kriege gehörige erklähret/ und daher findet man auch viel von den Festungen und Attaqven darinnen. Er beschreibet aber zugleich das Kriegswesen der alten Römer und Griechen.

§. 13. Nun will ich auch von einigen nützlichen Büchern reden/ welche zu dem Ende geschrieben sind / damit die Anfänger in der Fortification unterrichtet werden können. In der Frantzösischen Sprache haben wir verschiedene von dieser Sorte. Es verdienet *Don Sebastian Fernandez de Medrano* hier nicht ohne Ruhm genennet zu werden/ dessen *Ingenieur Practique ou l'Architecture militaire & moderne* (A Brusselles 1696 in 8. 1 Alph. Tabb. XXXV) gute praxin mit raison beybringet. Es ist zugleich eine zur Fortification zulängliche Geometria practica mit darinnen enthalten.

§. 14. *Ozanam* in seinem *Traité de Fortification* (A Paris 1694. 17 Bog. Tabb. XLIV) hat die Maximen der Fortification wohl erklähret / und verschiedene Manieren

zu

zu befestigen/ als seine eigene / des *Errard*, des Grafen von Pagen / des *Bombelle*, des *Blondel*, des *Vauban*, des *Sardi*, des *de Ville*, des *Marolois*, ausführlich abgehandelt/ auch in allen die Trigonometrische Rechnung gewiesen.

§. 15. Der *Ingenieur François* (A Paris 1691 in Reg. 8. 13½ Bog. Tab XXXIII) wird gleichfalls von denen geliebet / die von dem Kriege Profession machen / weil nebst der Geometria practica auf dem Papiere und Felde die Haupt-Maximen der Fortification in angenehmer Kürtze vorgetragen/ die Zeichnung der Festungen ohne Tabellen angewiesen/ auch der würckliche Bau erläutert / und *Vaubans* verstärckte Manier zuerst darinnen publiciret wird.

§. 13. Der *Chevalier de Saint Julien* in seiner *Architecture militaire* (A la Haye 1705 in 8. 11 Bog. XXV) erklähret überhaupt die Maximen der Fortification und das dessein verschiedener Ingenieurs, thut einen Vorschlag wie man grosse Städte vortheilhaft fortificiren könte und zeiget eine leichte herrliche Methode die Irregulären Oerter bey nahe wie Reguläre zu fortificiren/ die sich bey jedem dessein gebrauchen läst.

§. 14. Ich muß auch die *Nouvelle maniere de fortifier les places, tirée des methodes du Chevalier de Ville, du Comte de*

de Pagan & de Monsieur de Vauban, (A Amsterdam 1689 in Reg. 12. 10 Bogen Tabb XV.)/ weil man nicht allein in diesem Wercke die Maximen der Fortification fast besser als sonst irgends wo antrifft/ sondern auch daraus lernen kan/ wie man die Desseins verschiedener Ingenieurs auf einmal nutzen kan.

§. 15. In unserer Teutschen Sprache haben wir **George Conrad** *Martii* oder **Stahls Europäischen** *Ingenieur* (Nürnberg 1696 in 8. 2 Alph. 16 Bog. Tabb. LX)/ darinnen nebst der Fortification eine vollständige Arithmetick und Geometrica practica enthalten: des Herrn **Johann Heinrich Behrs aufs neu verschantzten Turenne oder gründliche Alt und Neue Kriegs-Bau-Kunst** (Franckf. 1690 in 8. 1 Alph. 16 Bog. Tabb. XXXII)/ welches fast eben so wie das vorige eingerichtet: **Sebastian Grubers Friedens- und Krieges-Schule** (Nürnberg 1697 in 8. 2 Alph. Text 11½ Bogen Kupfer) und andere dergleichen mehr.

§. 16. Wer die Fortification verstehet/ kan des Herrn **Leonhard Christoph Sturms** *Architecturam Militarem hypotheticam & Electicam,* **das ist/ getreue Anweisung/ wie man sich der gar verschiedenen Teutschen/ Frantzösischen/ Holländischen und Italiänischen Be-**

festi-

festigungs-Manieren bedienen können (Nürnberg 1702 in 8. 10 Bog. Text/ 6 Bog. Kupfer) mit Nutzen lesen/massen in selbigem Buche die Schriften der meisten Ingenieurs erzehlet/ ihre desseins erläutert/ beurtheilet und öfters verändert werden.

§. 17. Von den Attaqven hat *Goulon* einen besonderen Tractat aufgesetzet/ darinnen diese Materie ausführlicher aus der Erfahrung abgehandelt wird/ als sonst in Fortifications-Schriften zu geschehen pfleget. Es sind diese *Memoires pour l' Attaque & pour la defense d' une Place* zu Wesel 1706 in Reg. 8 nachgedruckt worden (5 Bogen Tabb. IV).

§. 18. *Joh. Teyler* hat in seiner *Architectura militari* (Rot. 1697 in 4. 8 Bog. Tabb. 41) hat die Principia der Fortification durch die Algebra zu erweisen angefangen.

Das 8. Capitel.

Von den Mechanischen Schriften.

§. 1. In den Mechanischen Schrifften werden entweder die Gesetze der Bewegung erklähret/ oder die Kräffte der einfachen Machinen untersuchet/ daraus die andern zusammen gesetzt werden/ oder auch verschiedene Machinen beschrieben.

§. 2. Unter die erste Classe gehören *Galilæi Galilæi discursus & demonstrationes Ma-*

Mathematicæ circa duas novas scientias pertinentes ad Mechanicam & Motum localem, welche zugleich mit seinen *Dialogis de systemate Mundi* zu Leyden 1699 in 4 aus dem Italiänischen in das Lateinische übersetzt heraus kommen. Die *Dialogi de motu* bestehen aus 1 Alph. 14 Bogen. Seine Lehren hat zum Theil *Torricellius* in seinen zwey Büchern *de motu gravium naturaliter descendentium & projectorum* erläutert und erweitert / welche unter seinen Operibus Geometricis anzutreffen (§. 15. c. 2.).

§. 3. Es gehöret ferner hieher des *Mariotte Traité du choc des corps* (A Paris 1673. 12.) des *Dechales Traité du mouvement* (Lugd. 1682. in 8), *Pardies discours du Mouvement Local avec des remarques sur le Mouvement* (Edit. tert. Haye Com. 1691 in 12) : allein man hat nun bessere Schrifften als diese/ deren Autoribus es nicht in allem gelungen.

§. 4. *Christianus Hugenius* und *Christophorus Wren* sind die ersten gewesen/ welche von den Gesetzen der Bewegung der Elastischen Cörper etwas zuverläßiges gegeben : gleichwie *Wallisius* von den anderen Cörpern/ die nicht Elastisch sind / einige Regeln gefunden. *Wallisii* Regeln stehen in den Transact. Anglic. n. 43 p. 864. *Wrennii* n. 43 p. 867. *Hugenii* n. 46 p.

927

927. Conf. *the Philosophical Transactions abrig'd* Vol. I. cap. 5. p. 545 & seqq.

§. 5. Der vortrefliche *Wallisius* hat einen herrlichen Tractat *de Motu* A. 1669 in 4. zu Oxfurt heraus gegeben/ welcher nun den ersten Theil seiner *Operum Mathematicorum* zieret/ in welchem nicht allein alles/ was *Galilæus, Wren, Hugenius* und er selbst dazumal von den Gesetzen der Bewegung erfunden/ durch Hülfe der Algebra erwiesen; sondern auch die Kräfte der einfachen Machinen/ die Hydrostatischen Lehren und viel andere zur höheren Geometrie dienende Sachen weitläuftig erklähret werden. Da nun aber *Wallisi* Werck nicht für Anfänger ist; so hat der Herr Joh. *Keill* sehr wohl gethan/ daß er in seiner *Introductione ad Veram Physicam* alles/ was bißher von gedachten Autoribus von der Bewegung gutes erfunden/ aus den Anfangs-Gründen der Geometrie denen Anfängern zu Liebe deutlich erwiesen. Und meritiret dieses Buch absonderlich von denen gelesen zu werden/ welche in der *Physica* was rechtes zu thun gedencken. Es ist zum andern mal vermehrter zu Oxfurt in Reg. 8 heraus kommen/ und bestehet aus $19\frac{1}{2}$ Bogen.

§. 6. Unter den Opusculis posthumis des *Hugenii* finden wir einen *Tractatum de Motu Corporum ex percussione*, und einen anderen *de Vi centrifuga*. Die Lehrsätze

des

des letztern hatte er schon in seinem *Horologio Oscillatorio* (Paris. 1673 in fol. 2 Alph.) zu Ende ohne demonstration publiciret/ und ist überhaupt viel von der Bewegung / sonderlich der pendulorum in diesem Buche zufinden: wie er deñ auch part. 3 *de linearum curvarum evolutione & dimensione* die höhere Geometrie mit neuen Erfindungen illustriret.

§. 7. Der grosse Geometra *Isaacus Newton* hat in seinen *Principiis Mathematicis Philosophiæ Naturalis* (Londini 1682 in Reg. 4. 2 Alphab. 18 Bog.) viel scharffsinnige Erfindungen von der Bewegung/ absonderlich den *viribus centripetis & centrifugis*. Allein es erfordert dieses Werck einen Leser/ der in der höheren Geometrie und beyder Analysi wohl gesetzt ist. An. 1706 hat *H. Ditton* ein Buch heraus gegeben/ dessen Titul und die aus andern Speciminibus bekandte Geschicklichkeit des Mannes mich alles gute von ihm hoffen lassen/ ob ich zwar das Buch selbst noch nicht gesehen. Und meine ich er werde nicht allein mit dem Herrn *Keill* zu des *Galilæi*, *Wallisii*, *Wrennii*, *Hugenii*; sondern auch zu des Herrn *Newtoni* Erfindungen einen ebenen Weg gebähnet haben. Der Titul des Buches ist: *The general Laws of Nature and Motion with their application to Mechanicks. Also the doctrine of centripe-*

tal Forces and Velocities of Bodies, describing any of the Conick Sections, being a part of the great Mr. Newtons Principles. The whole illustrated with variety of useful Theorems and Problems, and accomodated to the use of Youger Mathematicians.

§. 8. In den *Memoires*, welche die *Academie Royale des Sciences* alle Jahre zu Paris heraus giebet/ findet man viel herrliche allgemeine Regeln von der Bewegung/ welche der Herr *Varignon* durch die Differential-Rechnung des Herrn von Leibnitz eruiret. Und in den Leipziger-Actis sind viel vortrefliche Schediasmata des Herrn von Leibnitz/ darinnen die *Scientia motus* durch neue Erfindungen illustriret wird.

§. 9. In der anderen Classe muß ich zuerst des Archimedis gedencken / in dessen zwey Büchern *de Æquiponderantibus* die Lehrsätze enthalten sind / daraus die Kräfte der *Machinen* beurtheilet werden. Er führet sich aber in denselben zugleich als einen grossen Geometram auf und ist nicht für Anfänger: für welche sich besser des *Jacobi Rohault Tractatus de Mechanica* schicket/ die unter seinen *Oeuvres posthumes* zu finden/ auch einigen Editionen seiner in Latein übersetzten Physicæ mit angehänget ist.

§. 10. Auch ist ein gutes Buch in dieser Materie/ des *Pardies La statique ou la Sci-*

Science des Forces monvantes, die zum dritten mal (A la Haye 1691 in 12 gedruckt worden und aus 10½ Bogen bestehet). Die Lateinische Ubersetzung tauget nicht im geringsten. Absonderlich dienet für Anfänger *Traité de* Mechanique *par le P. Lamy*, in dem dieses Mannes Deutlichkeit bekandt ist. (A Paris 1687 in 12. 12 Bog.). Er hat auch noch einen anderen kleinen Tractat zu Paris 1687 in 12 von einem einigen Bogen heraus gegeben / dessen Titul: *Nouvelle maniere de demontrer les principaux theoremes des Elemens des* Mechaniques.

§. 11. *De la Hire* in seinem *Traité de Mecanique* (A Paris 1695 in Regal 12. 18 Bogen) führet schon auf höhere Sachen / denn er erweiset nicht allein / was in Verfertigung der Machinen Nutzen haben kan; sondern handelt auch zugleich von den Gesetzen der Bewegung. Es ist eines der besten Bücher / die wir zur Zeit in dieser Materie haben.

§. 12. *Paulus Casatus in* Mechanicorum *libris VIII.* (Lugd. Gall. 1684 in 4. 4 Alphab. 7 Bog.) hat viel nützliche zur praxi dienende Sachen: ist aber etwas weitläufftig. Und unser Andreas Jungenickel in seinem Schlüssel zur Mechanica dienet gleichfals denen die auf die praxin hauptsächlich sehen / und hat er die theoriam Mechanicam solchergestalt vorgetragen / daß

auch in der Geometrie gantz unerfahrene und im raisoniren ungeübte sie gar wohl begreiffen können. Sie ist zu Nürnberg 1661 in 4 heraus kommen und bestehet aus 2 Alphab. 3 Bog.

§. 13. *Guilielmus Oughtred* hat *Institutiones Mechanicas* geschrieben/ die unter seinen *Opusculis posthumis* (Oxonii 1677 in Reg. 8. 15 Bog.) die erste Stelle einnehmen/ darinnen von weiter nichts als den Kräften der einfachen Machinen geredet wird.

§. 14. Wer so wol die gemeine Algebra/ als die Differential-Rechnung auf die Mechanick appliciret sehen wil; kan die *Elemens de* Mécanique *& Physique* des *Parent* nachschlagen (A Paris 1700 in Regal 12. 22 Bogen Tabb. 12). Darinnen er die Gesetze der Bewegung der aneinander stossenden Cörper nach den Hugenianischen principiis vorträget, und zugleich die Kräfte der einfachen Machinen erklähret/ dabey viel nützliche Mechanische Fragen erörtert.

§. 14. *Johannes Alphonsus Borellus* hat in seinem Buche *de motu Animalium* die Gesetze der gemeinen Mechanick in Erklährung der Bewegungen der Thiere sehr glücklich gebrauchet. Es ist zum andern mal zu Leyden 1685 in 4 aufgelegt worden (3 Alph. 17 Bogen Tabb. XVIII.) und nützlich denen zu lesen/ welche sich auf die Erforschung der Natur legen. Er hat auch noch ein Buch

de

de Vi percussionis und ein anderes *de motionibus Naturalibus à gravitate pendentibus* geschrieben/ welche beyde zusammen zu Leyden 1686 unter dem Titul: J. A. *Borelli Atrium Physico Mathematicum apertum ad ædificium ejus magnificum de motu animalium* nachgedruckt worden (3 Alphab. 16 Bog. Tabb. XX).

§. 15. Blosse Machinen beschreibet **Georg Andreas Böckler** in seinem Theatro Machinarum oder **Schauplatze der Mechanischen Künste** (Nürnberg 1673. in fol. 11 Bog. Tabb. 154). Der gröste Theil seiner Machinen ist nichts nutze. Die übrigen Machinen sind schon in einem viel besseren Stande als sie von ihm beschrieben werden. Die Proportionen der Theile/ darinnen die Seele der Machinen bestehet/ sind gantz verschwiegen. Doch kan man aus seinen Figuren die verschiedene Manieren die Bewegende Kräfte an Machinen zu appliciren / und durch sie Cörper in Bewegung zu bringen nehmen. Es ist zur Zeit kein rechtes Theatrum Machinarum verhanden. Noch elender als des Böcklers ist des Zeisings *Theatrum Machinarum*.

§. 16. Accuratere Beschreibungen geben *Perrault* von einigen Machinen in seinem *Recueil de plusieurs Machines de Nouvelle invention* (A Paris 1700 in 4. 7 Bog. Tabb. XI.) und *Hugenius* in seinem *Automato Planetario* zu Ende der Operum posthu-

humorum, darinnen er eine Machine beschreibet / dadurch alle Bewegungen der Planeten richtig vorgestellet werden. Er hat auch seine Perpendicul-Uhr in dem *Horologio Oscillatorio* deutlich beschrieben.

§. 17. Uberhaupt hat die Structur der Uhrwercke ein gewisser Engelländer umbständlich erklähret / dessen *Artificial Clockmaker or A Treatise of Watch and Clock-Worck* das andere mal zu Londen 1700 in Reg. 12 vermehrter heraus kommen (7½ Bog. Tabb. II). Und man hat wohl gethan / daß man es in die Teutsche Sprache übersetzt / und zu des Welpers Gnomonick mit drucken lassen. Es handelt auch von dieser Materie *Oughtred* in seinen *Operibus posthumis* p. 68 & seqq

§. 18. *Petrus Limpergh* in seinem *Moole-Book* (Amsterd. 1690 in Reg. fol. 2. Bog. Tabb. XXXII) beschreibet sonderlich die Holländischen Wind-Mühlen / so wol die Mahl- als Schneide-Mühlen.

Das 9. Capitel.

Von der Hydrostatischen / Aerometrischen und Hydraulischen Schrifften.

§. 1. Die Hydrostatick hat *Archimedes* zuerst erfunden / und gehören hieher seine zwey Bücher *de insidentibus humido*. Die Lehren des *Archimedis* hat *Marinus Ghetal-*

dus in seinem *Archimede Promoto* vermehret / daraus *Oughtred* in seinen *Operibus posthumis* p. 55. & seqq. einen Auszug giebet.

§ 2. *Mariotte* in seinem *Traité du mouvement des eaux & des autres Corps fluides* (A Paris 1686 in Reg. 12 17½ Bogen) hat die Hydrostatischen / auch verschiedene zur Hydraulick gehörige Lehrsätze durch Experimente und rationes erwiesen. Es ist das beste Buch / welches wir zur Zeit in dieser Sache haben.

§. 3. Es meritiret auch *Robertus Bayle* in seinen *Paradoxis Hydrostaticis* (Genevæ 1680 in 4. 15 Bog. Tabb. 3) und in seiner *Medicina Hydrostatica* (Genevæ 1693 in 4. 10½ Bog.) von denen gelesen zu werden / welche diese Wissenschafft in der Physica und im gemeinen Leben nutzen wollen.

§. 4. *Franciscus Tertius de Lanis* hat in dem dritten Theile seines *Magisterii Natur. & Artis* (Parmæ 1692 in f. 6 Alph. 14 Bog. Tabb. XIII) lib. 25. f. 49. & sqq. die Hydrostatick ausführlicher erklähret / als sie sonst irgendswo zu finden. Und in dem ersten und absonderlich dem anderen Theile findet man die *Machinas Hydraulicas* hin und wieder beschrieben: gleich wie auch in dem ersten Theile die Mehanica sehr illustriret wird. (Tom. I. Brixiæ 1684 in fol. 6 Alph. Tabb. XXIV. Tom. II. Brixiæ 1686. 6 Alph. 5 Bog. Tabb. XX).

§. 5. *Lamy* erläutert in dem andern Theile seiner *Mechanique*, oder dem *Traité de l' equilibre des liqueurs* gleichfals die Hydrostatischen und Hydraulischen Hauptlehren. Dergleichen thut auch *Rohault* zu Ende seiner Mechanick. Eben so *Wallisius* hat seine Mechanicam mit den Hydrostatischen Lehrsätzen beschlossen. Und *Newton* hat in seinen *principiis Philos. Nat. Mathem. Sect. 5. lib. 5. p. 29. & seqq.* die Hydrostatick illustriret.

§. 6. Von der Aerometrie ist noch kein besonderes Buch vorhanden ausser dem / was ich unter dem Titul *Elementa Aërometriæ* 1709 zu Leipzig in 12 (16 Bog. Tabb. XII) drucken lassen. Doch gehören mit unter die Aerometrischen Schrifften / die *Traitez des Barometrés, Thermometres & Notiometres, ou Hygrométres* (A Amsterdam 1707 in 12. 7 Bog. Tabb. XXXV).

§. 7. Von der Bewegung der flüßigen Cörper haben wir zur Zeit nichts besseres / als was *Varignon* in den *Memoires de l' Academie des Sciences* A. 1699 & 1703 un̄ *Dominicus Gulielmini in Mensura Aquarum Fluentium* (Bononiæ 1690. 1691. in 4. 19. B. Tabb. VIII.). gegeben / und aus den *Divers Ouvrages de Mathematique & de Physique par Msr. de l' Academie Royale des Sciences* können hieher einige Tractätlein

lein des *Picard* und *Mariotte* gezogen werden.

§. 8. Von dem *Picard* haben wir *Traité du Nivellement* (à Paris 1684 in 12. 15 Bog. Tabb. III) / in welchem das Wasser-wägen / welches man zu Wasserleitungen nöthig hat / auf die neueste Manier beschrieben wird. Es ist fast das eintzige in der Materie.

§. 9. Unter den Alten hat *Heron Alexandrinus* in seinem *Libro Spiritalium*, welches *Commandinus* in das Lateinische übersetzet / und zu Paris 1583 in 4. heraus gegeben / die verschiedenen Arten der *Fontain*en beschrieben. Dergleichen Arbeit haben wir auch dem bekandten Jesuiten *Caspari Schotto* in seiner *Mechanica Hydraulico-pneumatica* zu dancken (Herbipoli 1658 in 4.) Georg Andreas Böckler in seiner *Architectura Curiosa* oder Bau- und Wasser-Kunst (Nürnberg 1704 in fol. 21 Bogen Tabb. 200) hat so wol die einfachen *Machinas Hydraulicas*, als allerhand biß 70 Arten der Auffsätze zu Fontainen / und über 120 Arten von Wasser- und Lust-Bronnen / beschrieben. Und *Lucas Antonius Portius* hat seinen *Nonnullis de motu corporum* auch etwas *de nonnullis Fontibus Naturalibus* angehänget / darinnen er die Möglichkeit einiger Brunnen zeiget / derer bey dem *Plinio* gedacht wird. (Neapoli 1704 in 12. 7 Bog. Tabb. V).

Das 10. Capitel.
Von den Optischen Schrifften.

§. 1. Von den Alten hat einiges von der Optick und Catoptrick *Euclides* aufgezeichnet / welches in der neuen Edition seiner Wercke des *Gregorii* (§. 6) zu finden.

§. 2. Umb das Jahr Christi 1100 hat *Alhazen* ein Araber ein grosses Werck von der Optick geschrieben / welches *Fridericus Risnerius* in VII Bücher und Capitel getheilet. Aus ihm hat A. 1250 *Vitellio*, ein Pole/in seinen weitläuftigen 10 Büchern von der Optick das meiste entlehnet. Es sind aber beyde Wercke nicht sonderlich zu achten. Denn von der Dioptrick wuste man dazumal fast gar nichts/indem die Vergrösserungs- und die Fern-Gläser noch nicht erfunden waren. Und in der Lehre von dem Lichte und den Farben steckten sie in grossen Vorurtheilen / wie sie denn auch nicht die wahre Beschaffenheit des Sehens verstunden.

§. 3. Die neuern haben meistens die Dioptrick excoliret. Kepler hat zuerst A. 1611 zu Augspurg eine *Dioptricam* in 8. heraus gegeben: allein dieses Büchlein ist noch sehr unvollkommen. *Cartesius* hat in seiner *Dioptrica*, welche stets mit zu seinen *Principiis Philosophiæ* gedruckt wird / viel Physicali-

sche

sche Materien. Was er vom Glaß-Schleiffen schreibet/ ist nicht viel nutze.

§. 4. *P. Cherubin*, ein Capuciner/hat in seiner *Dioptrique Oculaire* (A Paris 1671 in fol. 5 Alph. 11 Bog. Tabb. XVI) sonderlich viel practica und beschreibet viel Machinen zum Glaßschleiffen. In seinem anderen Wercke *de la Vision parfaite* (A Paris 1678 in fol. 3 Alph. 10 Bog. Tabb. 23) ist sein Hauptwerck sein doppeltes Fernglaß zu vertheidigen/ dadurch man mit zwey Augen zugleich sehen kan/ welches er zu Ende seiner *Dioptrique* angegeben hatte.

§. 5. *Nicolaus Hartsoeker* hat in seinem *Essay de Dioptrique* (A Paris. 1 Alph. 10 Bogen mit viel eingedruckten Figuren) viel Physicalische Materien mit abgehandelt; doch handelt er auch wohl von dem Glaßschleiffen und dem Gebrauch der geschliffenen Gläser/ als einer der aus der Erfahrung redet/ und demonstriret die Eigenschafften der geschliffenen Gläser. Dieses Buch verdienet demnach recommendiret zu werden.

§. 6. Für diejenigen/ welche die Theorie lieben/ und von aller praxi richtigen Grund verlangen/ dienet des *William Molineux Dioptrica Nova, or à Treatise of Dioptricks* (Londini 1692 in 4. 16 Bog. T. 40.) Und kan des *Hugenii Dioptrica* aus seinen *Operibus posthumis* mit dem *Tractatu de* po-

poliendis vitris mit dazu genommen werden/ in welchem Buche viel neue Dinge anzutreffen sind. Es sind diese Opera zu Leyden 1703 in 4 heraus kommen (2 Alph. 19 Bog. Tabb. 24).

§. 7. Die Optick allein/ ohne Catoptrick und Dioptrick erklähret *Christophorus Scheinerus* (Oeniponti 1619 in 4. 1 Alph. 10 Bog.). Der Herr *Newton* in seiner *Opticks or a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and colurs of Light* (Lond. 1704 in Reg. 4. 2 Alph. 5 Bogen Tab. 19) hat durch sehr viel Experimente seine neue Thorie von dem Lichte und den Farben zu erweisen sich angelegen seyn lassen. Zu Ende sind zwey Lateinische Tractate/ der erste de *Enumeratione Linearum tertii generis*; der andere *de quadratura Curvarum*. *Samuel Clark* hat dieses Werck in das Lateinische übersetzt/ und *Newton* die Ubersetzung gut geheissen/ auch etwas weniges von neuem hinzugethan. (Londini 1706 in Reg. 4. 2 Alph. 9 Bogen. Tabb. XIX). Hieher kan man auch des *Mariotti Essay de la Nature des Couleurs* (A Paris 1681 in Reg. 12. 1 Alph. 9 Bogen/ Tabb. XVI) welcher der vierdte und gröste Theil von seinen *Essays de Physique* ist/ und des *Hugenii Traité de la Lumiere* (A Leide 1690 in 4. 1 Alph. 2 Bog.) gerechnet werden/ dessen hypothesi sich *Pierre Ango* in seiner *Optique* (A Paris 1682 in 12) die meisten

sten Optischen phoenomena zu demonstriren bedienet.

§. 8. *Andreas Tacquet* hat in seiner *Optica*, die mit unter seinen *Operibus Mathematicis* zufinden/ dasjenige erwiesen/ woraus sich die Regeln der Perspectiv herleiten lassen/ die er zugleich mit durchnimmet: in seiner *Catoptrica* aber die Eigenschafften der platten/ hohlen und erhabenen Spiegel erwiesen. *Isaacus Borrow* in seinen *Lectionibus Opticis* hingegen handelt die Theorie von der Catoptrick und Dioptrick ab: dergleichen auch *David Gregorius* in einem angenehmen Compendio, nemlich in seinen *Elementis Dioptricæ & Catoptricæ Sphæricæ* (Oxonii 1625 in Reg. 8. 7 Bog.) verrichtet.

§. 9. Die Optick/ Catroptrick und Dioptrick zugleich erklähret *Zacharias Traber*, ein Jesuite/ in seinem *Nervo Optico* (Viennæ 1675 in fol. 2 Alph. 16 Bog. Tabb. XXVIII)/ welcher mit einer ungeschickten Theorie anmuthige praxes verknüpfet. Noch mehrere praxes aber hat Joh. Zahn in seinem *Oculo artificiali Teledioptrico*. Die andere Edition ist vermehrter/ aber mit vielen Druckfehlern zu Nürnberg 1702 in fol. heraus kommen (9 Alph. 8 Bog. mit vielen Holtzschnitten und Kupfern). Dieses Buch ist denen zu recommendiren/ die sich auf praxin legen. Johann

hann Christoph Kolhans hat in seinem *Tractatu Optico* (Lipſ. 1663 in 8) aus allerhand Büchern excerpta zuſammen getragen. *Athanaſius Kircherus* in ſeiner *Arte Magna Lucis & Umbræ* (Romæ 1646 in fol. 10 Alph. 16 Bog. Tabb. XXXIV) und viel Holtzſchnitte) illuſtriret alle Optiſche Wiſſenſchafften und hat viel angenehme Kunſt-Stücke.

§. 10. *Andræ Alberti* zwey Bücher von der Perſpectiv (Nürnberg 1670 in fol. 19 Bog. Tabb. XV) ſind allen Liebhabern dieſer Kunſt ſehr zu loben/ und nicht weniger des *Deſargues* Maniere *Univerſelle pour pratiquer la Perſpectiv*/ die anfangs von *Abr. Boſſe* heraus gegeben und darnach in die Holländiſche Sprache überſetzt worden. (Amſt. 1686 in 8. 12 Bogen und ſehr viel Figuren).

§. 11. Denen/ die ſich in Perſpectiviſchen Zeichnungen üben wollen/ kan des *P. Andreæ Puzzo Architectura Pictorum & Sculptorum* dienen. Der erſte Theil iſt Lateiniſch und Italiäniſch zu Rom 1693 in Reg. fol. der andere aber 1700 heraus kommen. Es hat jeder ſo viel Kupfer als Blätter/ nemlich der erſte 102; der andere 120. Es iſt demnach der Mühe werth geweſen/ daß der Italiäniſche Text ins Teutſche und die ſehr groſſen Kupfer in ein beqvemeres Format gebracht worden/ damit mehrere dieſes

ses nützliche Werck brauchen können. Der erste Theil ist zu Augspurg 1706 der andere 1709 nachgestochen worden.

§. 12. Eben so hat Johann Christoph Rembold gar rühmlich eines Frantzösischen Jesuitens *Perspective practique* (A Paris 1642 in 4) in die Teutsche Sprache übersetzet und zu Nürnberg in diesem Jahre heraus gegeben/ weil in derselben eine fertige praxis mit einer leichten Theorie verknüpffet wird. Es bestehet aus 1 Alph. 8 Bog. und sind 150 saubere Kupfer mit eingedruckt.

§. 12. Den Anfängern dienet des *Lamy Perspective* (A Paris 1701 in 8) / darinnen ihre Gründe auf eine leichte Art Mathematisch erwiesen werden. Die Demonstrationes lieben/ können des *Joh. Franc. Niceronis Thaumaturgum Opticum* aufschlagen und doch eine leichte Praxin dabey haben. Es wollte zwar dieser Minorite noch zwey Theile von der Catoptrick und Dioptrick heraus geben; aber er ist zu frühzeitig gestorben. Der erste Theil ist zu Paris 1646 in fol. gedruckt worden (2 Alph. 18 Bogen Tabb. XLII). Es ist auch dieses Mönches *Perspective curieuse* zu Paris 1652 in 4. heraus kommen/ welche in 4 Bücher getheilet ist und mehr als der *Thaumaturgus Opticus* in sich enthält.

§. 13. Ich kan unter die Optischen Schrif-

ten auch noch diejenige rechnen/ welche Observationen durch Vergrösserungs-Gläser gegeben. Hieher gehöret *Roberti Hooke Micrographia*, so Englisch zu London 1667 in fol. (3 Alph. 8 Bog. Tabb. XXXVIII) gedruckt worden und die Physick sehr illustriret. Von solcher Beschaffenheit sind auch des *Antonii van Leeuwenhoek* Schriften/ nemlich 1 *Arcana Naturæ detecta* (Delphis Batav. 1695 in 4): 2. *Continuatio Arcanorum Naturæ detectorum*, (Ibid. 1697 in 4): 3 *Arcana Naturæ ope & beneficio exquisitissimorum Microscopiorum detecta* (Lugd. Batav. 1696 in 4): 4. *Continuatio epistolarum datarum ad longe celeberrimam Regiam Societatem Londinensem* (Lugd. Bat. *1696* in 4). Von geringerem Werthe ist Johann Frantz Griendels von Ach *Micrographia Curiosa* oder Beschreibung verschiedener kleiner Cörper (Nürnberg 1687 in 4 9 Bog. Tabb. XXXV). Nicht viel besser ist die *Micrographia Curiosa*, welche *Philippus Bonanni* seinen *Observationibus circa viventia, quæ in rebus non viventibus reperiuntur* (Rom. 1691 in 4. 2 Alph. 12 Bog. Tabb. LXVIII) angehängt/wenn man ausnimmet/ was er von seinem Vergrösserungs-Glase geschrieben.

Das 11. Capitel.
Von den Astronomischen Schriften.

§. 1. Die Astronomischen Schrifften enthalten entweder die Observationen in sich/ oder sie erklähren die Trigonometrischen und Geometrischen Methoden aus den Observationen die Astronomischen Tabellen zu construiren und die Bewegung der Sterne zu calculiren/ oder sind Astronomische Tabellen/ oder sie erklähren den Gebrauch der Himmels-Kugel/ oder auch nur die Natur und Eigenschafften der Welt-Cörper.

§. 2. Was wir von den Observationen der Alten übrig haben/ unter denen sonderlich *Hipparchus* berühmt ist / hat uns *Ptolemæus* in seinem *Almagesto* erhalten. An. 882 fieng unter den Saracenen *Albategnius* an sich hervorzuthun : An. 1457 *Johannes Regiomontanus* (der eigentlich **Müller** heisset und von seiner Vaterstadt in Francken den Nahmen *Regiomontanus* bekomen/) nach seinem Tode aber biß 1504 seine Schüler **Johann Werner** und **Bernhard Walther**/ welche zu Nürnberg observiret/ da auch *Regiomontanus* seine meisten Observationen angestellet. Von An. 1509 an hat *Copernicus*, nach ihnen der Landgraf von Hessen Wilhelm mit seinem Mathematico *Christophoro Rothmanno* zu Cassel und *Tycho de Brahe* zu Uranienburg obser-

viret. *Tycho* hat An. 1582 angefangen und bis 1601 continuiret mit einem grösseren Vorrathe und besseren Instrumenten / als vor ihm nicht geschehen war. Alle bißher erzehleten Observationen treffen wir in der *Historia Cœlesti* an / welche auf Befehl Sr. Käyserlichen Majestät *Ferdinandi III.* glorwürdigstens Andencken / zu Strasburg 1672 in fol. gedruckt worden (12 Alph. 6 Bogen Tabb. III.). Es werden zugleich des *Tychonis* Instrumente darinnen beschrieben / die er selbst An. 1602 in seiner *Astronomiæ instruratæ Mechanica* vorgestellet / auch des *Mæstlini*, *Schikardi* und einiger anderen Observationen mit angehängt.

§. 3. In dem verwichenen Seculo hat sich die Zahl der Observatorum sehr vermehret. Wir haben in Engelland den *Horoccium*, den *Halley* und Flamstädt; in Franckreich den *Gassendum*, *Cassini* und *de la Hire*; in Italien den *Ricciolum*; in Teutschland den *Hevelium*, Eimarten / Wurtzelbauern und den Königl. Astronomum in Berlin / Kirchen; in Coppenhagen den Königl. Mathematicum, Etats- Cantzeley- und Consistorial-Rath / auch Policey- und Bürgemeister / den Herrn Römer.

§. 4. In den *Operibus posthumis* des *Jeremiæ Horoccii* (Londini 1673 in 4. 3 Alphab. 12 Bogen Tabb. 2) findet man *Excerpta*

cerpta ex Epistolis ad Guil. Crabtrium, suum in studiis Astronomicis socium, darinnen seine Observationes von 1636 biß 1640 beschrieben werden; einen *Catalogum observationum*, die er in gedachten Jahren gehalten / und *excerpta ex Schediasmatis Guil. Crabtrii de observationibus ab ipso institutis An. 1635. 36. 37. 38.*

§. 5. *Joh. Baptista Ricciolus*, ein Jesuit in Italien / hat in seiner *Astronomia Reformata* (Bononiæ 1665 in fol. 6 Alph. 5 Bogen) einen Kern alter und neuer Observationen mit den vornehmsten der seinigen vereieiniget / und daraus geschlossen / wie weit man in allen Theilen der Astronomie nunmehro kommen sey: welches Buch daher von den Liebhabern der Astronomie mit Nutzen zulesen.

§. 6. *Johannes Hevelius*, ein Raths-Herr in der Alt-Stadt zu Dantzig / hat es dem *Tychoni* so wol an Instrumenten / als an Fleiß zu observiren weit zu vorgethan. Seine Instrumente hat er in dem ersten Theile seiner *Machinæ cœlestis* (Gedani 1673 in Reg. fol. 5 Alph. 4 Bogen Tabb. XXX) beschrieben. Der andere Theil (Gedani 1679 in fol. 14 Alph. 6 Bog. mit vielen Kupfern) enthält seine Observationen von 48 Jahren in sich und ist zu bedauren / daß die meisten Exemplaria davon durch einen unvermutheten Brand noch selbiges

Jahr im Feuer aufgegangen. *Robertus Hooke*, in seinen Animadversionibus über den ersten Theil/ die er zu Londen in Englischer Sprache 1674 in 4 heraus gab/ wollte die Richtigkeit seiner Instrumente in Zweifel ziehen; allein als der berühmte *Halley* nach Dantzig von der Societät geschickt wurde/ hat er sie in allem gantz richtig befunden und die Methode zu observiren des *Hevelii* gebilliget. Die Observationen die er ihm zugefallen An. 1679 angestellet/ nebst vielen andern hat er zu dem Ende in seinem *Anno Climacterico s. Rerum Uranicarum observationum quadragesimo nono* (Gedani 1685 in fol. 2 Alphab. 6 Bogen mit vielen Kupfern).

§. 7. Von dem *Cassini* sind auserlesene Observationen in einem vortreflichen Wercke anzutreffen/ welches unter dem Titul: *Recueil d' observations faites en plusieurs voyages par ordre de Sa Majestè, pour perfectionner l' Astronomie & la Geographie, avec divers Traitez Astronomiques par Messieurs de l' Academie Royale des Sciences* (A Paris 1693 in fol. 6 Alph. 12 Bog. Tabb. II) heraus kommen und viele merckwürdige Sachen in sich enthält. Was man von den dreyßig-jährigen Observationen des Herrn Flamstädts sich zu versprechen habe/ ist aus den *Miscellaneis Berolinensibus* p. 263 & seqq. zuersehen. Und wäre

zu

zu wünschen/ daß seine *Historia cœlestis Britannica* bald in der Gelehrten Händen wäre. Nicht weniger wäre zu wünschen/ daß auch dem Herren Römer von seinen wichtigen affairen so viel Zeit übrig wäre als erfordert wird seine auserlesenen Observationen zu publiciren/ die er so viele Jahre her angestellet/ oder er einen anderen geschickten Gehülffen bekäme/ der sie zu grossem Aufnehmen der Astronomie in Ordnung brächte. Auch würden die Liebhaber der Astronomie aus des Herrn Kirchs/ des Herrn **Wurtzelbauers** und des seeligen Herrn **Eimarts** Observationen Nutzen haben/ wenn man die vornehmsten derselben ihnen mittheilen wollten. Sonst findet man viele Astronomische Observationen in den *Memoires de l' Academie Royale des Sciences*, den *Transactionibus Anglicanis*, den *Miscellaneis Berolinensibus* und den *Actis Eruditorum*.

§. 8. Die Geometrische Astronomie hat unter den Alten *Claudius Ptolemæus*, der im Jahr Christi 147 gestorben/ beschrieben. Seine μέγα Σύνταξις ist A. C. 827 auf Befehl des Königes der Saracenen *Maimonis* aus dem Griechischen in das Arabische und An. 1528 aus dem Arabischen von dem *Georgio Trapezuntio* in das Lateinische übersetzt/ von dem *Luca Gaurico* Ma-

theseos Professore zu Neapel übersehen und in gedachtem Jahre das erste mal zum Drucke befördert worden. Weil dieses Werck eine vollkomme Astronomie in sich begreifft/ aber für Anfänger zu weitläufftig ist/ so wolte *Georgius Purbachius* daraus einen Auszug machen. Wie er aber über der Arbeit starb/ so hat *Regiomontanus* vollendet/ was sein Lehrmeister nicht ausführen konte / und dadurch das *Almagestum* des *Ptolemæi* (welches diesen Nahmen von den Arabern bekommen hat) deutlich erklähret. Es ist aber erst An. 1543 heraus kommen. Des *Albategnii* Werck *de scientia stellarum* (Norimbergæ 1537 it. Bononiæ 1545 in 4) ist nach der Art des Almagesti eingerichtet/ aber die Astronomie wird in selbem aus den eigenen Observationen des *Albategnii* verbessert.

§. 9. *Nicolaus Copernicus* hat A. 1566 zu einer wahren Astronomie den Grund geleget / als er in seinen *Libris 6 Revolutionum cœlestium* (die mehr als einmal gedruckt worden) des *Philolai* Lehre von der Bewegung der Erde umb ihre Axe und um die Sonne eingeführet / und dadurch die verwirreten Epicyclos und Epicycepicyclos auf einmal verbannet. Und ist sich dannenhero zu verwundern / daß *Tycho de Brahe* ihm nicht gefolget.

§. 10.

§. 10. *Christianus S. Longomontanus* hat in seiner Astronomica Danica (Amstelod. 1640 in fol. 6 Alph.) die gantze Astronomie abgehandelt und mit Exempeln die Regeln erläutert. Allein weil er mit dem *Tychone* das Systema Copernici nicht annehmen wil; multipliciret er die Circul in seinen Theorien vor die Bewegung der Planeten über die massen. *Phil. Lansbergius* hingegen in seinen *Theoricis Motuum cœlestium* bleibet bey dem *Copernico* und giebt dannenhero viel leichtere Theorien der Bewegung der Planeten.

§. 11. Die bisher genannte Astronomi alle/ und die zu ihren Zeiten gelebet/ haben davor gehalten/ daß die Planeten sich in Circuln bewegeten. Wer nun die Astronomiam circularem völlig zu erkennen Lust hat/ dem kan *Andreas Tacquet* in seinen *Libris Octo Astronomiæ* ein gnügen thun. Es sind dieselben der herrlichste Theil von seinen *Operibus Mathematicis* und den Liebhabern der Astronomie zu recommendiren. Nur ist zubeklagen/ daß er keine Exempel gegeben.

§. 12. *Johannes Keplerus* hat in seinen sehr tieffsinnigen *Commentariis de motibus Stellæ Martis* zuerst dargethan/ daß die Planeten sich nicht in Circuln/ sondern in einer Ellipsi bewegeten/ in derē einem Brenn-

Puncte die Sonne wäre und nach dem wahren Gesetzen der Natur die Bewegungen der Planeten in seinem *Epitome Astronomiæ Copernicanæ* (Franc. 1635 in 8. 2 Alph. 15 Bogen) erklähret / auch in beyden Büchern die Ursachen der himmlischen Bewegungen untersuchet / welche der Herr von Leibnitz in seinem *Tentamine de causis motuum Cœlestium Physicis* (welches in den Leipziger-Actis A. 1689. p. 82 zufinden) und der Herr *Newton* Lib. 3. Princip. Mathem. Philos. Nat. besser als er getroffen und weiter ausgeführet: auch neulich *Philippe Villemot* in seinem *Nouveau Systeme du mouvement des Planetes* (A Lyon 1707 in 12. 12 Bogen Tabb. 12) erläutert.

§. 13. *Ismaël Bullialdus* wolte in seiner *Astronomia Philolaica* (Paris. 1645. in fol. 7 Alph. 20 Bogen) Keplers Theorie verbessern; aber es zeigete *Sethus Wardus in Inquisitione in Astronomiam Philolaicam Bullialdi*, daß es ihm nicht völlig gelungen war. Doch hat er in seinen *Fundamentis Astronomiæ Philolaicæ clarius explicatis & assertis adversus Wardi impugnationem* (Parisiis 1657 in 4. 7 Bogen) seine Fehler ziemlich glücklich verbessert und wäre zu wünschen gewesen / daß er (wie er Vorhabens war) seine *Astronomiam Philolaicam* nach dieser Verbesserung geändert hätte.

§. 14. Nach derselben gehet *Thomas Streete* in seiner *Astronomia Carolina*, die der Herr Gabriel Doppelmäyer aus dem Englischen in das Lateinische übersetzet (Norribergæ 1705 in 4. 1 Alph. 13 Bogen Tabb. V). Hingegen *Vincentius Wing* hat in seiner *Astronomia Britannica* die erste Manier des *Bullialdi* in etwas verändert. (Londini 1669 in fol. 7 Alph. 5 Bog.) Dieses Buch dienet für Anfänger/ weil sie alle Aufgaben der Astronomie durch wahre Exempel erläutert/ die Trigonometrie deutlich erklähret/ und einen Auszug aus den alten und neuen Observationen darinnen finden.

§. 15. Es hat zwar *Sethus Wardus* in seiner *Astronomia Geometrica* (Londini 1656 in Reg. 8. 14½ Bog.) eine gantz Geometrische Methode angewiesen die Bewegungen der Planeten in der Ellipsi zu rechnen / und hat dieselbe *Joh. Newton* in seiner *Astronomia Britannica* (Lond. 1657 in 4. 1 Alph. 20 B. Englisch) durch alle Planeten mit Exempeln erläutert/ allein da er von den wahren Gründen/ die Kepler angegeben / abgewichen/ ist es kein Wunder/ daß sie mit der Erfahrung nicht überein kommet. Dessen ungeachtet hat auch der Graf von Pagan in seiner *Theorie des Planetes* (A Paris 1657 in 4.) dieselbe behalten.

§. 16. Alle Erfindungen der Astronomorum hat *Joh. Baptista Ricciolus* in seinem

Almagesto Novo (Bon. 1651 in f. 16½ Alph.) zusammen getragen. Hingegen *David Gregorius* hat in seinen *Elementis Astronomiæ Physicæ & Geometricæ* (Oxoniæ 1702 in f. 5 Alph. 12 Bog.) eine solche Astrongmie gegeben/ wie man sie wünschen kan/ nachdem *Copernicus* das wahre *Systema Mundi* auf die Bahn gebracht/ Kepler die richtige Gesetze der Bewegung entdecket/ und *Newton* ihre Ursachen ausgemacht. Es verdienete das vortreffliche Werck/ daß es aus den Observationen des Herrn Flamstädt durch und durch mit wahren Exempeln erläutert würde.

§. 17. Die Anfänger finden den Kern der neueren Astronomie in des *Guilielmi Whiston Prælectionibus Astronomicis* (Cantabrigiæ 1707 in Reg. 8. 1 Alph. 6 Bog.) wiewol er nur die Theorie der Planeten abhandelt. Sonst sind auch des *Nic. Mercatoris Institutionum Astronomicarum Libri duo* (Londini 1676 in 8. 1 Alph.) ein sehr dienliches Buch/ darinnen beyde Theile der Astronomie nach den hypothesibus der alten und neuen Astronomorum erklähret und mit Exempeln illustriret worden.

§. 18. Die alleraltisten Astronomischen Tabellen sind des *Ptolomæi*, die in seinem *Almagesto* zu finden/ aber nicht mehr mit dem Himmel überein kommen. *Alphonsus X.* König in Castilien/ hat dieselben verbessern

las-

lassen/ hauptsächlich durch den Juden *Is. Hazan*. Daher sind A. 1252/ die *Tabulæ Alphonsinæ* zuerst publiciret worden. Er hat über 400000 Ducaten auf die Astronomie zu verbesserung der Tabellen gewendet/ und selbst eine Vorrede dazu gemacht/ die in etlichen Exemplaribus zu finden. Man merckte aber bald/ daß auch diese Tabellen nicht so viel Ruhm verdienten als sie hatten/ und da *Purbachius Professor Matheseos* zu Wien und *Regiomontanus* ihre Unvollkommenheit bekandt machten / legete man sich auf das Observiren / publicirte und emendirte die Schrifften der alten Astronomorum: aber es kam die Sache nicht zustande/ absonderlich da *Regiomontanus* frühzeitig starb/ welcher der Arbeit gewachsen war.

§. 19. *Nicolaus Copernicus* hat in seinen *Libris Revolutionum* neue Tabellen gegeben/ aber sie sind niemals gebraucht worden/ indem *Erasmus Reinholdus* Math. Prof. in Wittenberg die *Tabulas Prutenicas* bald daraus verfertigte. Es erkannte aber *Tycho de Brahe* schon in seiner Jugend ihre Unvollkommenheit/ und legte sich mit solchem Eifer auf das Observiren/ weil er sie verbessern wolte: allein er hat es selber nicht zu stande gebracht. Zwar verfertigte aus des Tychonis Observationen *Longomontanus* die *Tabulas Danicas*, die er nach dem Exempel des *Copernici* in seiner *Astronomia Danica* der

Theo-

Theorie eines jeden Planetens beyfügte: allein sie wurden durch des unvergleichlichen Keplers *Tabulas Rudolphinas* (Ulmæ 1627 in fol. 2 Alph. 20 Bog.) bald verdunckelt. Unerachtet *Lansbergius* durch seine *Tabulas motuum cœlestium perpetuas* dieser ihren Werth verkleinern wollte; so hat er doch nicht Glauben gefunden/sondern vielmehr *Horoccius* in seiner *Astronomia Kepleriana defensa*, die der gröste Theil von seinen operibus posthumis ist / ihm öffentlich wiedersprochen. Eine bessere Arbeit war des *Morini*, der *Mariæ Cunitiæ*, und des *Nicolai Mercatoris*, welche den schweeren calculum Rudolphinum den Anfängern zu erleichtern getrachtet/und daher die Tabulas Rudolphinas in eine andere Forme gebracht. *Morini Tabulæ Rudolphinæ in Compendium redactæ* sind mit des *Streetii Astronomia Carolina* zu Nürnberg heraus kommen (§. 14). *Maria Cunitia* hat ihre Arbeit unter dem Titul: *Urania propitia* sive *Tabulæ Astronomicæ mire faciles, vim hypothesium physicarum à Keplero proditarum complexæ, facillimo calculandi compendio sine ulla Logarithmorum mentione phænomenis satisfacientes* Lateinisch uñ Teutsch zu Oeltze in Schlesien drucken lassen (1650 in f. 6 Alph 4 Bog.) *Mercator* aber ist in seinen Institutionibus Astronomicis nachzuschlagen.

§. 20. Die Tabulæ des *Wingii* in seiner

Astro-

Astronomia Britannica und die *Novalmagesticæ* des *Riccioli* in seiner *Astronomia Reformata* sind für den *Rudolphinis* nicht in grosses Ansehen kommen/ noch weniger aber die/ welche Joh. *Newton* in seiner *Astronomia Britannica* nach den Theorien des *Wardi* gerechnet/und die *Tables Astronomiques du Comte de Pagan* (A Paris 1658 in 4. 1 Alph. 11 Bog.) die auf eben diesen Grund gebauet. *Bulialdi Tabulæ Philolaicæ* in seiner *Astronomia Philolaica* sind denen dienlich/ welche sich in Astronomischen Rechnungen anfangen zu üben. Der berühmte Astronomus Flamstädt hält die *Tabulas Carolinas* des *Streetii* in seiner *Astronomia Carolina*, mit vor die besten/daher sie auch *Whiston* mit zu seinen *Prælectionibus Astronomicis* drucken lassen. Endlich hat *de la Hire* seine *Tabulas Astronomicas* auf blosse Observationes, und keine Hypothesin gebauet: welches vorhin zu præstiren unmöglich war/ ehe man die Ferngläser/ Micrometra und Perpendicul-Uhren hatte. Sie sind zu Paris 1702 in 4. heraus kommen (1 Alph. 4 Bog. Tabb. IV.) und treffen zur Zeit überaus gnau mit den Observationen überein.

§. 21. *Johannes Hevelius* hat in seinem *Prodromo Astronomiæ* (Gedani 1690 in f. 4 Alph. 7 Bog.) neben dem *Catalogo Fixarum* auch neue *Tabulas Solares* und sein

Fir-

Firmamentum Sobiescianum, welches die Sterne kennen zu lernen dienet: wozu auch unter den Astronomis *Joh. Bayeri Uranometria* (Ulmæ 1661 in f. 13 Bog. Tabb. 48) gebraucht wird. Für Anfänger dienen auch dazu *Ægidii Strauchii Astrognosia* (Witteb. 1684 in 12. 9 Bog. Tabb. 25) und *Wilhelmi Schickardi Astroscopium* (Lipsiæ 1698 in 12. 6 Bog. Tabb. II.).

§. 22. Von dem Gebrauch der Himmels- und Erd-Kugel haben *Guil. Bleau* in seiner *Institutione Astronomica de usu Globorum* (Amstel. 1690 in Reg. 8. 16. Bog.) und sonderlich *Bion* in seiner *Usage des Globes celestes & terrestres & des Spheres* (A Paris 1699 in Reg. 12. 16 Bog. Tabb. 26) sehr wohl geschrieben / welcher mit gleichem Fleisse / einen Tractat von einem Astronomischẽ Instrumente / so Astrolabium heisset / und zur Auflösung vieler Astronomischen Fragẽ dienet / zu Paris 1702 unter dem Titul: *l' Usage des Astrolabes tant universals, que particuliers* (10½ Bog. Tabb. IX). heraus gegeben.

§. 23. Wer die Natur und Eigenschafften der Welt-Cörper zu erkennen lust hat / dem dienen ausser dem *Almagesto* des *Riccioli* 1. *Christophori Scheineri Rosa Ursina* (Bracciani 1630 in f. mit vielen kostbahren Figuren) darinnen sonderlich die Sonnen-Flecken erklähret werden: 2. *ejusdem disquisitio-*

tiones Mathematicæ de Controversiis & novitatibus Astronomicis (Ingolstadii 1614 in 4) 3. *Galilæi* Historie von den Sonnen-Flecken/ die er in Italienischer Sprache zu Rom 1613 heraus gegeben: 4. *Scheineri Opusculum de refractionibus cœlestibus* (Ingolstadii 1617 in 4): 5. *Johannis Kepleri Libri tres de Cometis* (Augustæ Vindelicorum 1619 in 4.): 6. *Ejusdem Prodromus Dissertationum Cosmographicarum*, so mehr als einmal heraus kommen. 7. *Ejusdem somnium de Astronomia Lunari*, so 1634 nach seinem Tode gedruckt worden: 8. *Johannis Hevelii Selenographia* (Gedani 1647 in f. 6 Alph. 10 Bog. Tabb. III): 9. *Ejusdem Cometographia* (Gedani 1668 in fol. 10 Alph. 19 Bog. Tabb. 38 und sehr viel eingedruckte Kupfer): 10. *Christiani Hugenii Systema Saturninum* (Hagæ-Comitis 1659 in 4. 12 Bog.) und absonderlich 11. sein *Cosmotheoros* (Ibid. 1698 in 4. 18. Bog. T. 5. it. Leoburgi 1704 in 8. 8 Bog. Tab. V.) 12. *Jacobi Bernoulli Conamen novi Systematis Cometarum* (Amstelod. 1682 in 8. 6½ Bog. Tab. 8): 13 *Joh. Bapt. du Hamel* in seiner *Astronomia Physica* (Tom. I. Oper. Philos. Norimb. 1681 in 4.) wiewol in den Schrifften auch viel zu finden/ welches die Geometrische Astronomie erläutert. Und über dieses sind auch diejenigen Schrifften hieher zu ziehen/ die oben von den Ursachen

der

der himmlischen Bewegungen (§.12) angeführet worden.

§. 24. Die Wahrheit und Vortreffligkeit des Copernicanischen Welt-Baues hat *Galilæus Galilæi* in seinem *Systemate Cosmico* (Lugd. Bat. 1699 in 4. 3. Alph. 21 B.) erwiesen / welches Buch mit grossem Verstande geschrieben / und unter andern viel zu der Astronomia Physica beyträget. Eben dergleichen Arbeit haben wir dem *Petro Megerlino* in seinem *Systemate Mundi Copernicano, argumentis invictis demonstrato* (Amstel. 1682 in 8. 6 Bog. Tab. 3) zu dancken.

§. 25. Ich könte auch noch von den *Ephemeridibus* und einigen andern kleinen Schrifften (als *Antonii de Monforte de siderum intervallis & magnitudinibus*, Neap. in 4. 16½ Bog. *Joh. Hanckii*, eines Jesuiten *Doctrina Elipsium pro opportuniore discentium usu in compendium redacti*) Mongunt. 1683. 16 Bogen Joh. Jacob Zimmermanns auf alle und jede *hypotheses* applicable fundamental Aufgaben von den Sonn- und Mond-Finsternissen Hamburg 1691 in 8. 15½ Bog.) reden / wenn mein Vorhaben nicht wäre nur der vornehmsten Schrifften zu gedencken. Doch erinnere ich von den Ephemeridibus, daß in verwichenen Seculo des Argoli für andern berühmt gewesen. Von 1700 biß

1720

1720 hat *Mezzavachi* einige heraus gegeben/ und man hoffet wenigstens für 50 Jahre dieses Seculi Ephemerides von der *Academie des Sciences* zu Paris.

Das 12. Capitel.
Von den Chronologischen Schrifften.

§. 1. Die Haupt-Bücher in der Chronologie sind des *Josephi Scaligeri de Emendatione Temporum*, *Dionysii Petavii Doctrina Temporum*, *Sethi Calvisii Introductio in Chronologiam* und *Johannis Baptistæ Riccioli Chronologia Reformata*.

§. 2. *Scaliger* hat sein Werck zu erst 1587 heraus gegeben / welches er aber 15 Jahre hernach fast gantz geändert / daß es sich kaum mehr ähnlich geblieben. Er hat in der Chronologie den Weg gebähnet und dadurch seine grosse Gelehrsamkeit sehen lassen. Es ist aber kein Buch für Anfänger.

§. 3. *Petavii Doctrina Temporum* ist anfangs zu Paris 1627 in fol. heraus kommen. Allein viel besser ist die neue Edition/ welche in drey Theilen zu Antwerpen 1703 in fol. (21 Alph. 7 Bog.) gedruckt worden. In der ersten Edition fehlet der gantze dritte Theil/ darinnen sein *Uranolgioum sive Systema variorum Auctorum, qui de Sphæra ac si-*

deribus eorumque motibus Græce commentati sunt (so er An. 1630 besonders heraus gegeben)/ seine *Libri VIII variarum Dissertationum*, welche die Chronologie illustriren/ und *Libri tres Epistolarum* enthalten. Es wäre wohl gethan gewesen/ wenn er den *Scaligerum* nicht so hart tractiret hätte.

§. 4 *Sethi Calvisii* Werck ist mehr als einmal so wol in fol. als in 4. aufgelegt worden. Er hat die schweeren Lehren *Scaligeri* erleichtert. *Riccioli Chronologia Reformata* ist zu Bononien 1669 in fol. gedruckt worden und meritiret wie seine übrigen Schrifften gelesen zu werden/sonderlich von denen die gerne alles/ was gethan worden/ beysammen finden wollen.

§. 5. Für Anfänger sind gute Bücher 1 *Dionysii Petavii Rationarium Temporum* (Moguntiæ 1646 in 8. 2 Alph. 22 Bogen) 2 *Guilielmi Beveregii Institutiones Chronologicæ cum Arithmetica Chronologica* (Londini 1705 in 4. 1 Alph. 11 Bogen). 3 *Ægidii Strauchii Breviarium Chronologicum* (Wittebergæ 1664 in 12. 2 Alphab. 10 Bogen).

§. 6. Zum Calender-Wesen gehörige Sachen müssen in des *Christophori Clavii Operibus*; *Sethi Calvisii Elencho Calendarii Gregoriani* (Franc. ad Mœn. 1612 in 4. 27 Bogen) *Francisci Vietæ Relatio-*

latione Calendarii vere Gregorianii, und *Calendario Gregoriano perpetuo*, so beyde unter seinen Operibus zu finden; *Blondells Histoire du Calendrier Romain* (A Paris 1682 in 4). *Erhardi Weigelii* Bürgerlichem Zeit-Siegel (Jena 1664 in 4. 15 Bogen); *Guil. Bonjour Calendario Romano* (Romæ 1701 in fol. 21 Bog.); *Francisci Blanchinii Solutione Problematis Paschalis* (Romæ 1703 in 4. 13 Bogen Tabb. V); *Dominici Quartaironii Responsionibus ad assertiones Dominici Cassini pro Reformatione Calendarii Gregoriani* (Romæ 1703 in Reg. 4. 4 Bogen) und *Eustachii Manfredii Epistola ad Quartaironium, qua Cassini assertiones* 16 *vindicantur* (Venetiis 1705 in Reg. 4. 8 Bogen) und *Thomæ Pii Maphæi opera de Cyclorum Soli-Lunarium inconstantia & emendatione* (Venetiis 1706 in 4. $1\frac{1}{2}$ Alph.) gesucht werden.

Das 14. Capitel.

Von Geographischen und Gnomonischen Schrifften.

§. 1. Das vollständigste und fast das einigste Werck von der Mathematischen Geographie ist des schon öfters mit Ruhm erwehnten Jesuitens *Riccioli Geographia Reformata* (Venetiis 1662 in fol. 7 Alph. 17

Bogen). Aus ihm hat Erhard Weigel in seinem Erd-Spiegel für die Anfänger einen Auszug gemacht (Jena 1665 in 4. 1 Alph. 3 Bog.)

§. 2. Es verdienet auch des *Bernhardi Varenii Geographia generalis* gelobet zu werden/ die zu Cambridge 1672 in 8 heraus kommen (1 Alph. 9 Bog. Tabb. V) und zu Jena nach dieser Edition 1693 in 8 nachgedruckt worden. Den Anfängern ist des Herrn Sturms *Geographia Mathematica* (Teutsch. Franckfurt an der Oder 1705 in 8. 10 Bog. Tabb. V) nützlich zulesen / darinnen die Beschreibung der Land-Charten gar geschickt vorgetragen wird.

§. 3. Hieher gehöret auch des *Georgii Fournier*, eines berühmten Jesuitens / *Hydrographie* (A Paris 1653. 10 Alph. 10 Bogen) welches das vollständigste Werck ist/ so wir von der Schiffart zur See haben.

§. 4. Die Gnomonick hat *Christophorus Clavius* fast zu erst in richtige Verfassung gebracht. Es macht aber seine *Gnomonica* den vierdten Theil seiner Operum (Moguntiæ 1612 in fol.) aus und ist allzu weitläufftig und verwirret geschrieben.

§. 5. *Athanasius Kircherus* hat in seiner *Arte Magna Lucis & Umbræ* sehr viel von Sonnen-Uhren. Und wer deutlichere demonstrationes als des *Clavii* verlanget/ denen wird *Guarinus Guarini in parte posterio-*

steriore Mathematicæ Cœlestis (Mediol. 1683 in fol. 1 Alph. 3 Bog. mit vielen Kupfern) vergnügen. Der erste Theil dieses Buches (mit vielen Kupf. 7 Alph. 5 B.) ist zugleich mit dem andern heraus kommen und erkläret die gantze Astronomie sehr deutlich. Anfänger können die demonstrationes der Haupt-Sonnen-Uhren in des *Henr. Cætsii Horologiographia* lesen (Lugd. Bat. 1689 in 4. 13 Bogen mit verschiedenen Figuren).

§. 26. *Picard* hat eine Methode erfunden durch Rechnung die Linien auf grossen Sonnen-Uhren zu suchen / die in den oben citirten Divers Ouvrages des Mathematiques (§. 7) stehet. *Philippus de la Hire* hat in seiner *Gnomonique* (A Paris 1683 in 12) Geometrische Methoden angewiesen aus einigen observirten Schatten Sonnen-Uhren zu beschreiben. Beyde sind in dem vierdten Theile / welcher in der dritten Edition zu der **Neu vermehrten Welperischen** *Gnomonica* (Nürnberg 1708 in fol. 2 Alph. 16 Bog. Tabb. 35). kommen. Es ist kein besseres Werck als dieses für diejenigen / die mehr auf praxin als Theorie sehen : wie wol der Herr **Joh. Christoph Sturm** / dem wir die erste Vermehrung in der anderen Edition zudancken haben / in seinen Anmerckungen auch die Ursachen der Beschreibung angeführet.

§. 7. Eben so finden dergleichen Liebhaber die Beschreibung von allerhand Arten der Sonnen-Uhren in Johann Peterson Stengels *Gnomonica Universali* oder Ausführlicher Beschreibung der Sonnen-Uhren (Ulm 1706 in 8. 18 Bog. Tab. 109) Aber kurtze/ doch gründliche Anweisungen von Beschreibung der vornehmsten Sonnen-Uhren hat man in dem Anhange zu dem *Clavi Mathematicæ* des *Oughtredi* und des *Phil. Lansbergii Horologiographia plana* unter seinen Operibus Mathematicis.

§. 8. *Ignatius Gaston Pardies* hat zwey Machinen ersonnen/ dadurch alle Arten der Sonnen-Uhren sehr leichte beschrieben werden. Ihre Beschreibung ist seiner *Statique* (§.10. c.8.) beygefüget.

Das 15. Capitel.

Von den Mathematischen *Cursibus* und *Lexicis*.

§. 1. *Petrus Herigonius* hat den ersten *Cursum Mathematicum* in Lateinischer und Frantzösischer Sprache geschrieben und in 6 Theilen zu Paris 1644 in 8 (10 Alph. 2 Bog.) drucken lassen. Er erklähret die 13 Bücher des *Euclidis* mit seinen *Datis*, nebenst einigen Schrifften des *Apollonii Pergæi*, so verlohren gangen und von *Willebro-*

do

do Snellio und *Francisco Vieta* restituiret worden; die Arithmetick/ Algebra/ Trigonometrie/ Geometriam practicam, Fortification/ Astronomie/ Geographie/ Schiff-Kunst/ Optick/ Catoptrick/ Dioptrick/ Perspectiv/ Gnomonick und Music. Im demonstriren gebraucht er lauter besondere Zeichen/ welche die Anfänger irre machen. Die Sachen/die er fürträget) sind gut: allein die meisten Disciplinen haben sich von der Zeit an sehr verändert. Auch gehet er mehr auf Theorie/ als auf praxin.

§. 2. Des *Casparis Schotti Cursus Mathematicus* (Bambergæ 1676 in fol. 7 Alph. 19 Bog. und über 2 Alph. Kupfer) gehet zwar mehr auf praxin, als auf die Theorie: allein er ist in den hauptsachen sehr unvollständig und seine Algebra tauget gar nichts.

§. 3. In Engelland hat *William Leybourn* (An. 1690 in fol. (11 Alph. Tabb. 43) seine *Mathematical Sciences* drucken lassen. Darunter findet man die Arithmetick/ Geometrie/ Algebra/ Geographie/ Chronologie/ Trigonometrie/Schiff-Kunst/ Gnomonick und Astronomie. Solcher gestalt ist dieser Cursus sehr unvollkommen.

§. 4. In Holland haben wir dem Abraham *de Graaf de geheele Mathesin of Wiskonst* zu dancken (Amstelod. 1694 in Reg. 4. 1 Alph. 21 Bog. Tabb. XCIV).

Sie bestehet aus der Arithmetick / Geometrie / Trigonometrie / Astronomie / Schiff-Kunst / Fortification / Gnomonick / Mechanick / Catoptrick und Dioptrick mit der Perspectiv / und der Algebra: die Algebra ist an Exempeln und Regeln vollständig. Eben so gehet der Arithmetick / Geometrie und Trigonometrie nichts ab: allein in den übrigen Disciplinen ist er meistens allzu kurtz.

§. 5. *Ozanam Cours de Mathematique* (à Paris 1699 in Reg. 8. 4 Alph. 14 Bog. Tabb. 155) bestehet aus drey Theilen. In dem ersten sind die ersten 6 und das 11 und 12te Buch des *Euclidis* mit der Buchstabe-Rechen-Kunst. In dem andern die Arithmetick ohne Beweise / die Trigonometrie mit den Tabulis Sinuum, Tangentium & Logarithmorum; in dem dritten die Geometria practica mit vielen nicht sonderlich nutzbahren Aufgaben; in dem vierdten die Mechanick und Perspectiv; in dem fünften die Geographie un̄ Gnomonick. Die Mechanick / Perpectiv und Gnomonick werden denen / die practica lieben / als wie die Kriegsleute / für die er sonderlich sein Buch geschrieben / allzu theoretisch seyn. Wer aber demonstrationes liebet / dem wird dieses Buch gefallen. Doch ist es ein sehr unvollständiger Cursus.

§. 6. Der vollständigste Cursus ist des *Clau-*

Claudii Francisci Milliet de Chales Mundus Mathematicus, der zum dritten mal 1690 in fol. zu Lyon in 4 Theilen (32 Alph.) aufgelegt worden. Darinnen sind ein Tractat von den Mathematischen Schrifften, die 13 Bücher *Euclidis*, Sphærica *Theodosii*, seine eigene Sectiones Conicæ, die Arithmetick/ Trigonometrie/ Algebra / Geometria practica, Mechanick/ Statick/ Geographie/ Magnetologie/ Baukunst / Zimmerkunst/ Steinhauerkunst/ Fortification / Hydrostatick/ ein Tractat von den Qvellen und Flüssen/ Hydraulick/ Schiffkunst/ Optick / Perspectiv/ Catoptrick/ Dioptrick/ Music/ Pyrotechmie / ein Tractat vom Astrolabio, Gnomonick/ die Astronomie/ mit seinen calculirten Tabellen / Astrologie/ ein Tractat von den Meteoris und einer von dem Calender. In der Algebra behält er des *Vietæ* Rechnung/ und appliciret sie nicht auf die Geometrie. Die Baukunst tauget nichts. Die übrigen Disciplinen sind alle gar wohl durchtractiret/ nur daß er in einigen allzusehr unterweilen auf Nebenwege ausschweiffet. Er hat die alten Sachen gar fleißig und deutlich zusammen getragen/ und behält zur Zeit den Preiß für allen Cursibus.

§. 7. Unter den *Lexicis Mathematicis* æstimiret man des *Ozanam Dictionaire de Mathematique* (Amst. 1691 in Reg. 4. 4

Alph.). Es erklähret nicht allein der Autor die in den Mathematischen Disciplinen gebräuchlichen Wörter nach Ordnung der Disciplinen; sondern auch viele Sachen zugleich mit.

§. 8. Das beste Mathematische Lexicon, so wir haben/ ist das *Lexicon Technicum Magnum or an universal Englisch Dictionary of Arts and Sciences, explaining not only the Terms of Art, but the Arts them selves, by J. Harris* (London 1704 in fol.) wiewol in diesem Buche nicht allein die Mathematischen Wörter und vornehmsten Wahrheiten/ sondern auch aller übrigen Philosophischen Disciplinen/ ingleichen der Chymie/ Wappen-Kunst/ Gnomonick/ Rhetorick rc. erklähret werden. Also kan man aus diesem Buche mit den Wörtern zugleich die Sachen lernen.

Ende des vierdten Theiles.

ERRATA.

NB. Die erste Zahl bedeutet die Seite die andere die Zeile. Was corrigiret werden soll / ist in eine parenthesin geschlossen: ausserhalb derselben stehet / was an dessen statt gesetzt werden muß.

Tom. I.

62.4. & 10.(157)175.71..24.(*dividi*ret werden)dividiren. 85.21. & 24.(14) 24.121.28.(DEG) DEF.128. 5.(Adab)AD ab.(Fd) FD. 8.(Ad) AD. 24. (DE) BE.129. 30. (DE) DB. 132.22. (CB) CE. (FB) FE.23.(CDA) CFD.(CFB) CFE.24. (FB) FE. 141.18. (CB) EB. 146. 14. (ADC) ABC. (ABC) ADC.155.16.(BC)DC. 165.23.(36)6.166.18. (HG) AG. 170.16.(AB) AD.172.15.(EBC) EDC. 26.27.(AD)DB.(AC) EC.174.14.(ABD) ADE. 21.(BC) AC. 176. 1. (ED) BD. 211.13.(ED) CD. 212.1.(10) 18. &c.12. (EF) EG. 233. (sinu toto) quadrat des Sinus totius. 235. In Fig. 6. müssen A und C. verwechselt werden. 1.(IK) IL. 237.4.(DB) DC.256.9. (AF) AE. 263.1.(ACD) ACB.297.12.(gelöschet) entzündet. 310.16. ($\frac{1}{4}$BF) $\frac{1}{4}$BE 21.(A) B. 313.28. & 314.15.(*quadranten*) Bogen. 369. 29.(AD).CD. 370.14.(E) C. 384. 8. (stossen) wohlstossen.

Tom. II.

26.13.(aus A) setzet hinzu: in G und AG. aus A in. 33. 1.&2. ($\frac{1}{12}$) $\frac{2}{12}$. ($\frac{4}{12}$) $\frac{5}{12}$ 37. 28. (des siebenden) des dritten.38.5.(TZ) XZ. 51.9.(CDE) DCE 53.13.(27) 37.55.17. (AC ist) AC: 89.11.(Geschütze) setzt hinzu: sicher.129.25. (den *Facen*) den gantzen Facen. 136.9.(den Brustwehren) dem bedeckten Wege) 137.1.(Bomben) Granaten. 160. 27. (und C.) und G. 163.15.($\frac{1}{2}$AD) AD. 164.10.(10°) 10'. 187. 10.(b) c. 190.29. streichet aus die Worte aus einem Puncte &c. bis zwischen diesen. 207.(Fig. 25.) Fig. 26.209.9.(T) F. 211.16.(ec) OP. 283.18.(G) C. 296.30.(Tab. III. Fig.23.) Tab. I. Fig. 7. 2.(DB) CB.303.(Fig. 33.) Fig. 23. 315. 20.(C) B. 253.26.(LFGL) KFGL. 366.17. (die Grösse) die Grösse der Schweere. 418. 2.(gegen G) gegen B unter einem Winckel von 45°. (F) I.(G) H. (H) G. (A) F. 421.30. (in-

wen-

wendig und auswendig) auswendig. 422. 15. (EC) HI. 424. 10. (gleichsam) gleichfalls. 437. 4. (AK) AB.

Tom. III.

16. 5. (AB) AE 17. 3. (FD) FB. 22. 13. (D) B. 26. 23. (die Farben) die Strahlen. 32. 27. (STV) SVT. 37. 5. (ON) SM. 47. 22. (C) B. 64. 19. (9°) 90°. 71. 11. (⅔EFM) ⅔EFN. 75. 28. (AN) setzet hinzu: und die Dicke des Glases OP. 119. 7. 13. (HR.) AL. 11. 12. (B2, B3) A2, C3. 130. 17. (AI) HI. 131. 22. (des Bogens) des Bogens BA und BH der Sinus des Bogens BC. 142. 16. (in C) in e. 148. 21. (AC) AB. 150. 18. (AC) AD. 24. (DE) DB. 188. 29. (*AC*) *AO*. 189. 31. (PA) *IA*. 207. 3. (PZ) setzet hinzu: als das Complement der Polhöhe und PS. 210. 21. (dem Complement der Höhe) der Höhe. 230. 12. [gerade Ascension] declination. 13. [DG] DS. 239. 3. [LF] FO. 246. 31. [aufhöret] setzet hinzu: Suchet in den Tabulis Declinationum auf/ wenn die Sonne die gegebene declination hat. 358. 12. [118] 178. 369. 22. [*AP*] BP. 371. 13. [1648.] 1647. den 20. Martii. 375. 9. [HP] KP. 11. 12. [CBL] KBL. 376. 26. [AK] DK. 380. 27. [des] der differentz der geraden Ascension des. 382. 24. [360] setzt hinzu: so vielmal genommen als der Planet herumkommen. 385. 27. [Erdbahn] Erde. 386. [22000] 20000. 387. 10. [DEB] EDB. oder HDB. 392. 25. [PR] PR. in der Ecliptick. 393. 10. [HR.] PR. 403. 13. [42] 12. 414. 6. [BC] BO. 415. 1. [DBH] DBP. 23. [*BZ.*] *BA* 416. 8. [TV] LV. 418. 1. [41′ 32″] 40″ 30″. 8. [der Entgegensetzung] dem ersten Viertel und der Entgegensetzung bis zu dem letzten Viertel. 420. 25. [*HAL*] *HAK*. 438. 24. [Orte] in einem Orte. 442. 10. [Parallaxis] setzt hinzu: der Sonne/ CDF. 446. 24. [*AL*] *AI*. 447. 28. [DC] DI. 449. 19. [Diameter] Diameter desselben dem halben scheinbahren Diameter. 463. 17. [Osten] Norden. 466. 13. [33°] 23°. 472. 27. [*LA*] LH. 495. 6. [mit dem Æquatore Parallel-Linien] der mit dem Æquatore *AC*. auf gleiche Weise getheilet worden andere Circul-Linien. 514. 24. [360] 366. 551. 14. [C] E. 18. [11] 2. 564. 21. [beschrieben] beschienen 576. 24. 25. [D] C.

Tom.

16. 7. (4a) 10a. 21. 27. ($x^m x^n$) $a^m x^n$. 28. (x) ar. 35. 5. (x^{2m}) x^m. 37. 13. (yy) $2yy$. 44. 19. ($1\frac{1}{2}-\sqrt{1\frac{1}{4}}$) $\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}$. 77. 30. ($x-2$) $n-2$. 79. 80. (Seite) Zahl der Winckel. 88. 24. ($m^{n-1}a$) $m^{n-1}a--a$. 95. 9. (DF) AF. 95. 25. ($\frac{1}{2}a^2$) $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2$. 100. 11. ($\frac{1}{4}a$) $\frac{1}{2}a$. 101. 8. & seqq. (BC) AC. 105. 4. (DB) CB. 106. 2. (BC) AC. 107. 14. ($y+z$) $y+c$. 108. 19. (KAD) KAE. 116. 9. ($100x:314$) $314x:100$. 117. 21. (da^2) ad^2. 26. ($\frac{1}{3}d$) $\frac{1}{3}d$. 121. 25. (EC) BC. 133. §. 224. & 141. §. 244. verwechselt den Parameter mit der Axe. 134. 10. (EF) AD. 135. 22. setzt hinzu: Fig. 19. 142. 2. (b^2) bx^2. 148. 10. (MR=y) PM=y. 150. 11. (AP) PB. 31. (und A) gegen A. 153. 4. (AE&c.) DE: De=ec: CE. 16. (ei) eg. 155. 26. (AD) Ad. 167. 15. ($2aab$) $\frac{1}{2}$aab. 169. 29. (+15) -15. 177. 8. 9. 14. ($\frac{1}{2}q+$) $\frac{1}{2}$q-2. 4. 5. ($\frac{1}{27}p^3$)-$\frac{1}{27}p^3$. 18. 19. löschet $\frac{n-2}{3}$ aus. 182. 7. (von u) von y. 12. ($\frac{n-2}{1}$) $\frac{n-3}{1}$. 185. 21. 22. 26. (+m^2-pm) $-m^2+pm$. 187. 22. ($y+rp$) rp. 188. 29. (+$\frac{1}{2}q$) $-\frac{1}{2}q$. 189. 15. ($p+$) $q+$. 191. 6. (-550) -350. 192. sind die Zeichen + und - verwechselt worden. 193. 24. (=0) =z. 198. 7. (+by^2) $-by^2$. 198. 12. (103) 13. 201. 15. (zx^2+) zx^2+z. 203. ($t-1$):$2t^2$) t^2+1,:$2t$. 204. 13. (4-3=1) 4-1=3. 208. setzt hinzu: Tab. I. Fig. 4. 209. 4. ($-x^2-c$) $-t^2-ct$. 217. 19. (AB) OB. 20. (BH) BD. 21 (HK.) DE 22. (C) E. 222. 15. & seqq. ($\frac{1}{2}b^2$) $\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}$ ab 223. 10. (AE) AD. (oa) $aa+ab$. 13. (FE) HM. 224. 30. (+$\frac{1}{2}ab$) $-\frac{1}{2}ab$. 227. 5. ($\frac{1}{2}a^2$) a^2. 228. 11. ($-by$) $+by$. 229. (M) N. =30. 12. 14. 22. (M) N. (N) M. 11. ($-by$) $+by$. 246. 27. ($2y$) ay. 247. 29. ($x-3$) $x-3\,dx$. 30. ($x^{-n-m},{:}m\text{-}21$) $x^{-n\,m},{:}m\,dx$. 251. 9. (R) H. 253. 17. löschet aus: folgends BP: 2AP.

2AP=AB: TA. 255. 17. $(a-x)$ $a+x$. 256. 8. (yx^n) $y^m x^n$. 266. 1. [a^2] x^2. 271. 20. [y^3] x^3. 273. 3. 16. 17. [N] M. 278. 19. [FE] FA. 299. 2. [b] a. [xy] ay. 304. 5. [dy] ady. 7. [xy] ay. 315. 29. [$125r^6$] $128r^7$. 328. 22. [dx] $:dx$. 360. 17. [CC] CD. 361. 19. [DE] DC. 362. 10. [$a-x$] $r-x$. 368. 30. leset: mCB: nBD. = BG: AB.

NB. Es sind T. IV. p. 410. seqq. wider diejenige/ welche vorgeben/ als wenn Sturmii Matthesis Enucleata die Matthesin puram nach dem Zustande unserer Zeiten zulänglich abhandelte/ rationes angeführet worden/ daß solches Vorgeben nicht Grund habe: wodurch man weder dem berühmten Autori, noch auch denen zu nahe getreten/ die sie aus anderer Absicht erklähren/ als die inventa recentiora in Matthesi pura beyzubringen. Unerachtet dieser in privat-Schreiben geschehenen Erklährung und beygefügter Versicherung/ man wolle in der Lateinischen Edition dieses weglassen/ hat ein gewisser Mann in der Vorrede in seinem Compendio Matheseos daher Anlaß genommen die Arbeit des Autoris und seine Person zu verunglimpfen. Es hält aber der Autor nicht vor nöthig/ ihm zu antworten/ weil ein jeder den Werth seiner Schlüsse finden kan/ der sie logice anatomiret/und aus allen libris Arithmeticis [vid. Sturmii Math. Comp. Tab. II. Arithm. f 14.] lernen wird/daß 5 communis mensura maxima von 40. und 75. sey. Es wird auch sonst niemand dem Autori verargen/ daß er die vorgetragene Sachen nach der Absicht des Werckes nicht nach den Blättern proportioniret; so wenig als man es dem alten Herrn Sturm verübelt/ daß er von der Perspectiv in seinen Tabulis nur eine Zeile hat/ mit Algebraischer Aufflösung einiger Arithmetischen Auffgaben aber 828. Zeilen anfüllet. Der Autor achtet es endlich seiner Existimation bey verständigen zu wieder sich gleich denen herum zu zancken/ die den Affecten die Herrschafft über sich gestatten. Wenn aber jemand aus Liebe zur Wahrheit mit anständiger Bescheidenheit und gravität von Dingen/ die untersuchet zu werden verdienen/ etwas einzuwenden hat/ dem wird er so wie andern gelehrten und berühmten Männern in Engelland und Franckreich in Act. Erud. A. 1710. & 1711. begegnen.

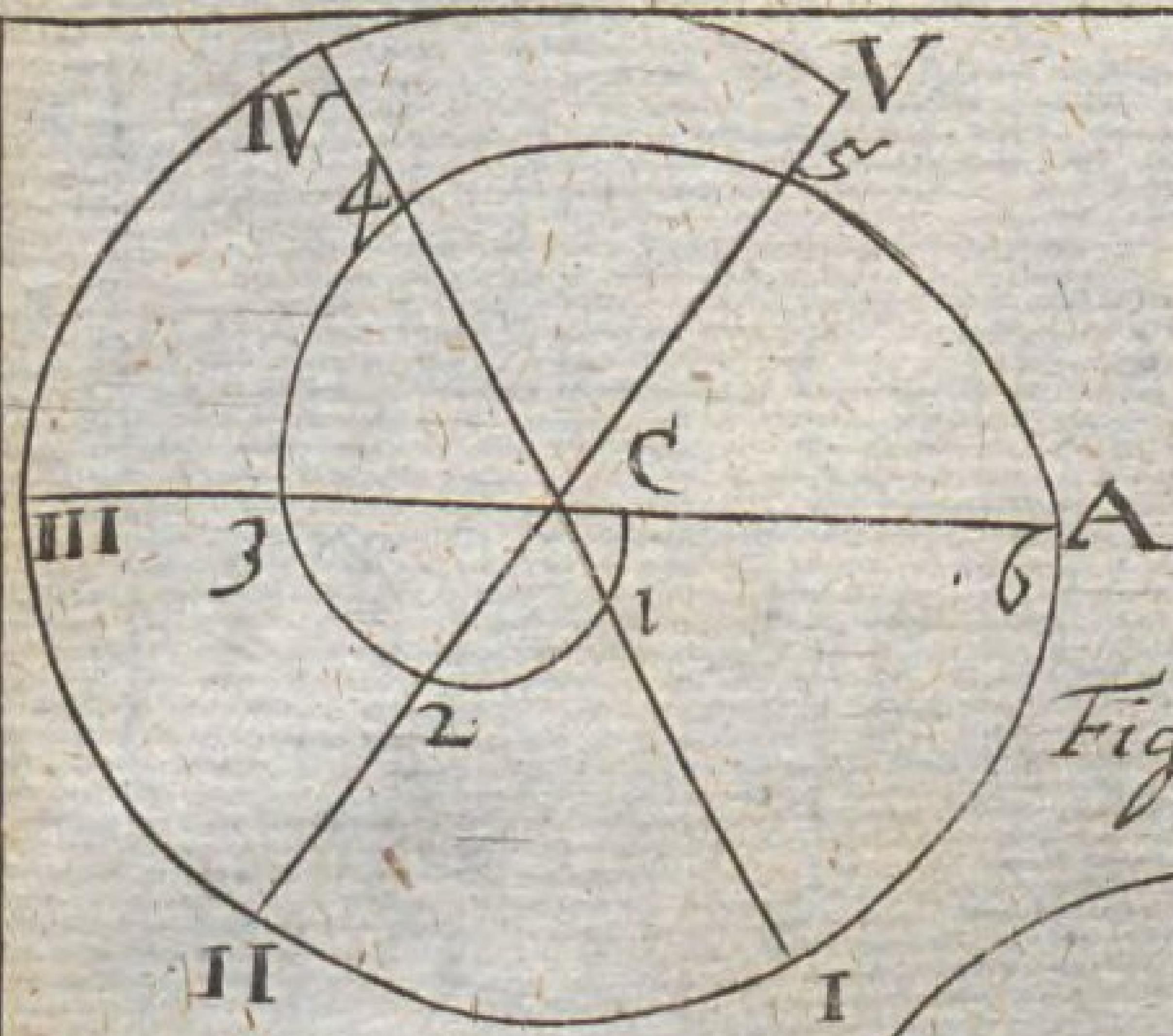


Fig.27.

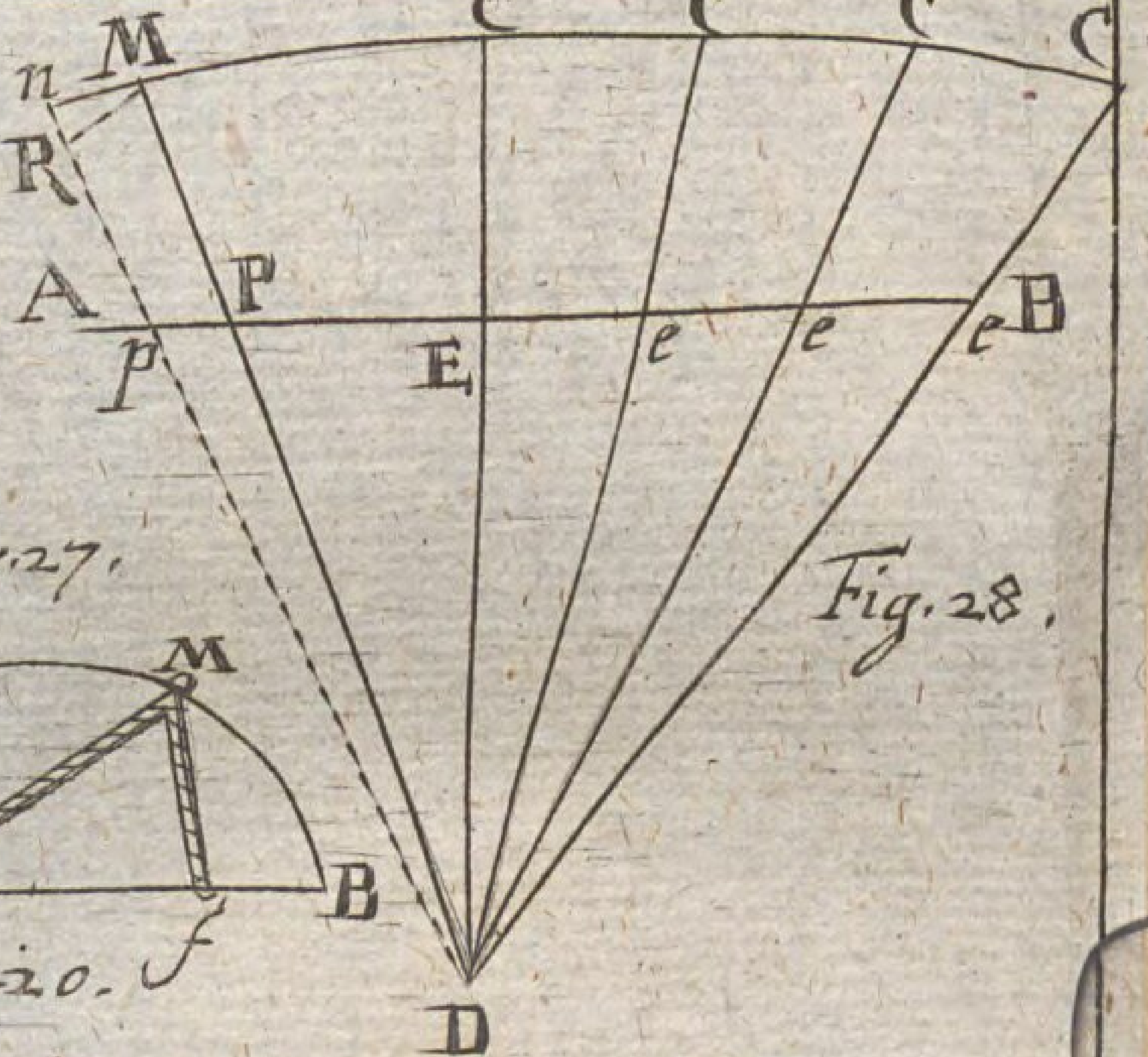


Fig.28.



Fig.20.

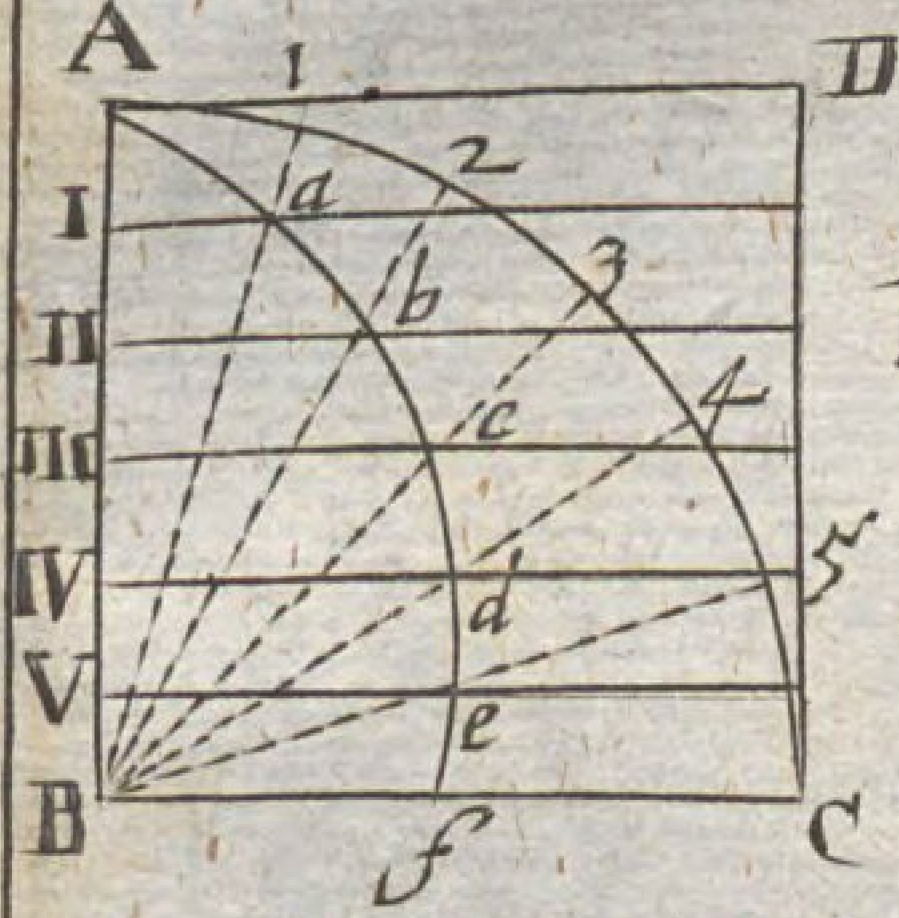


Fig.30.

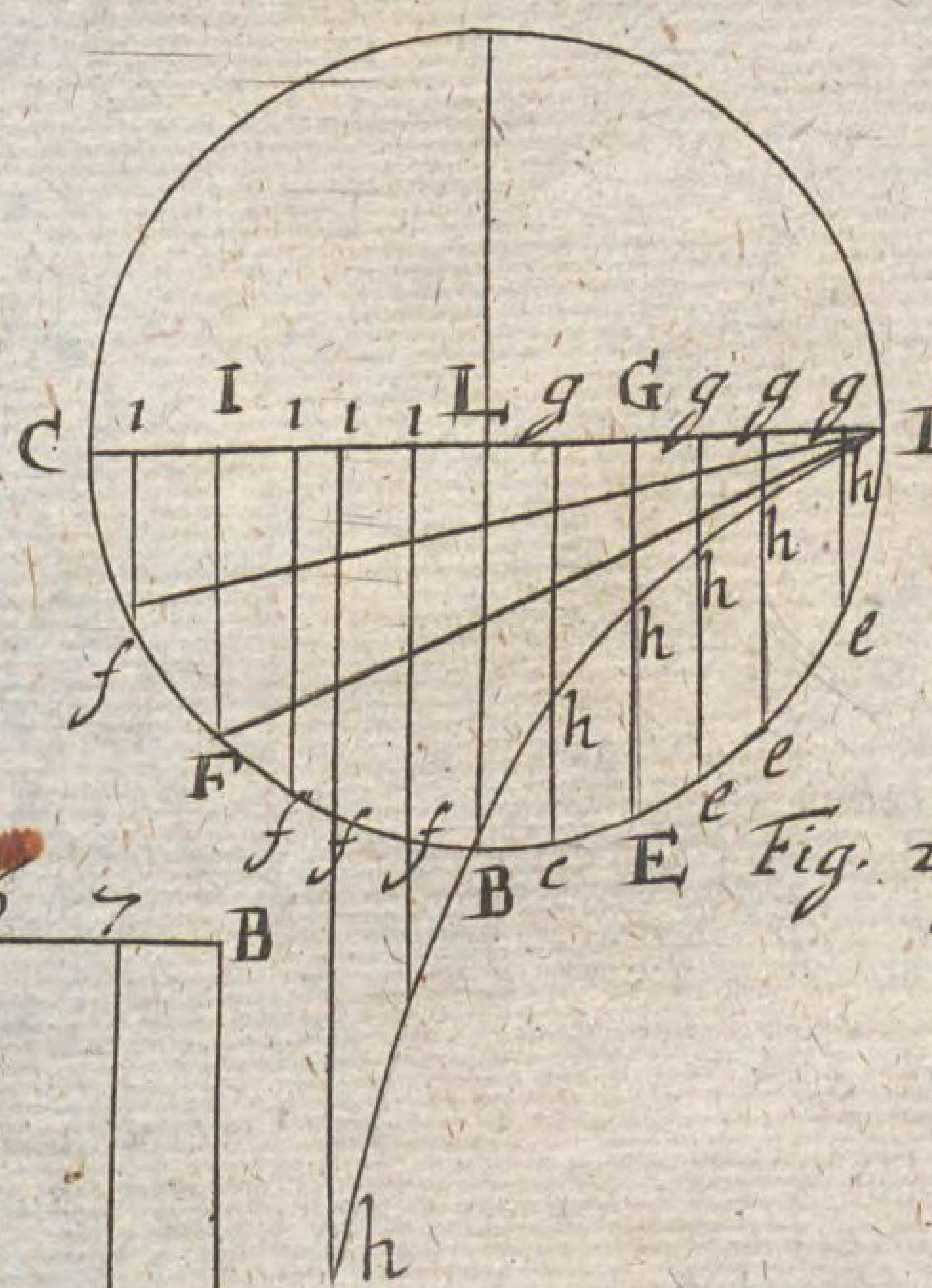


Fig. 29.

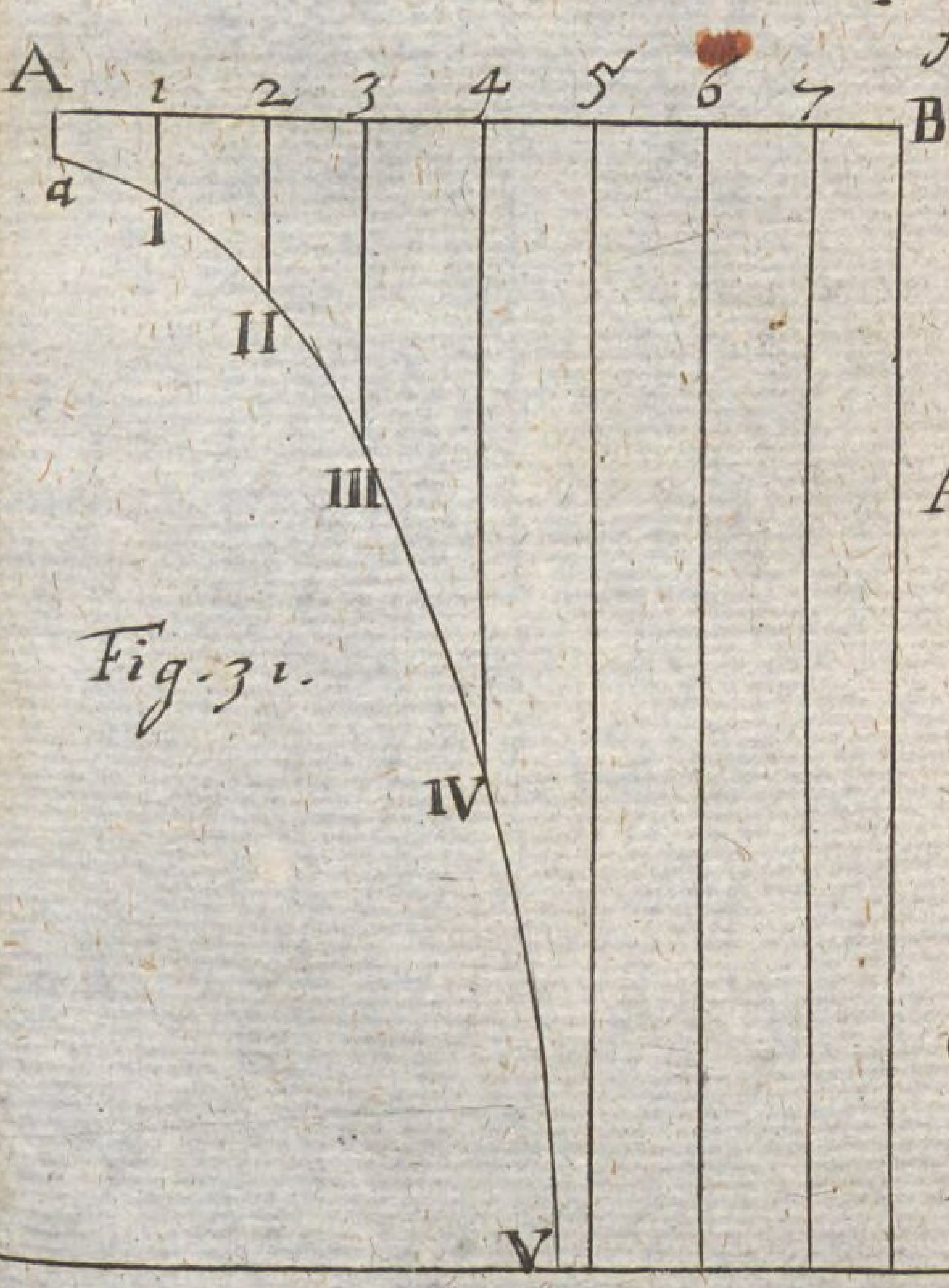


Fig.31.

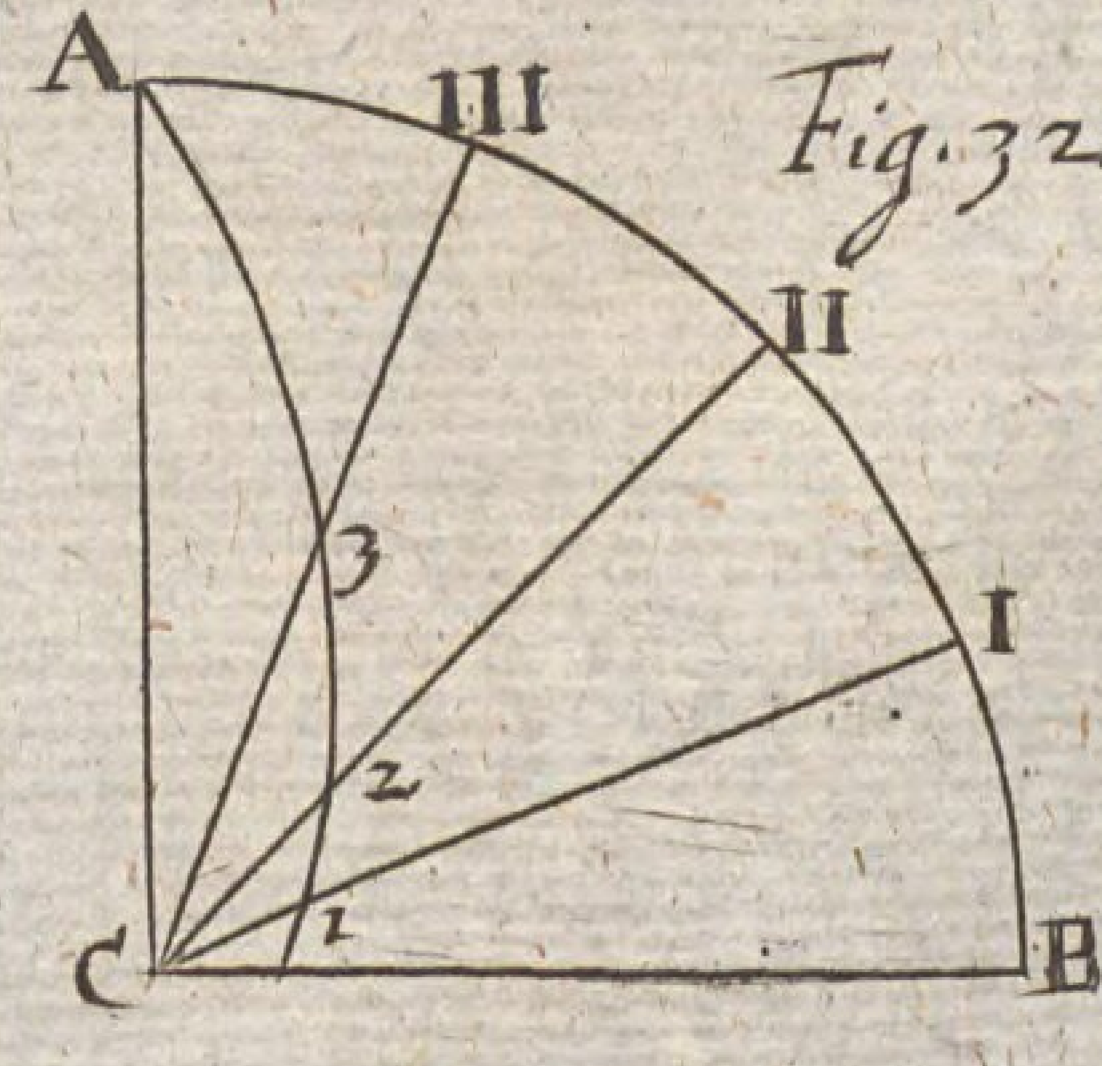
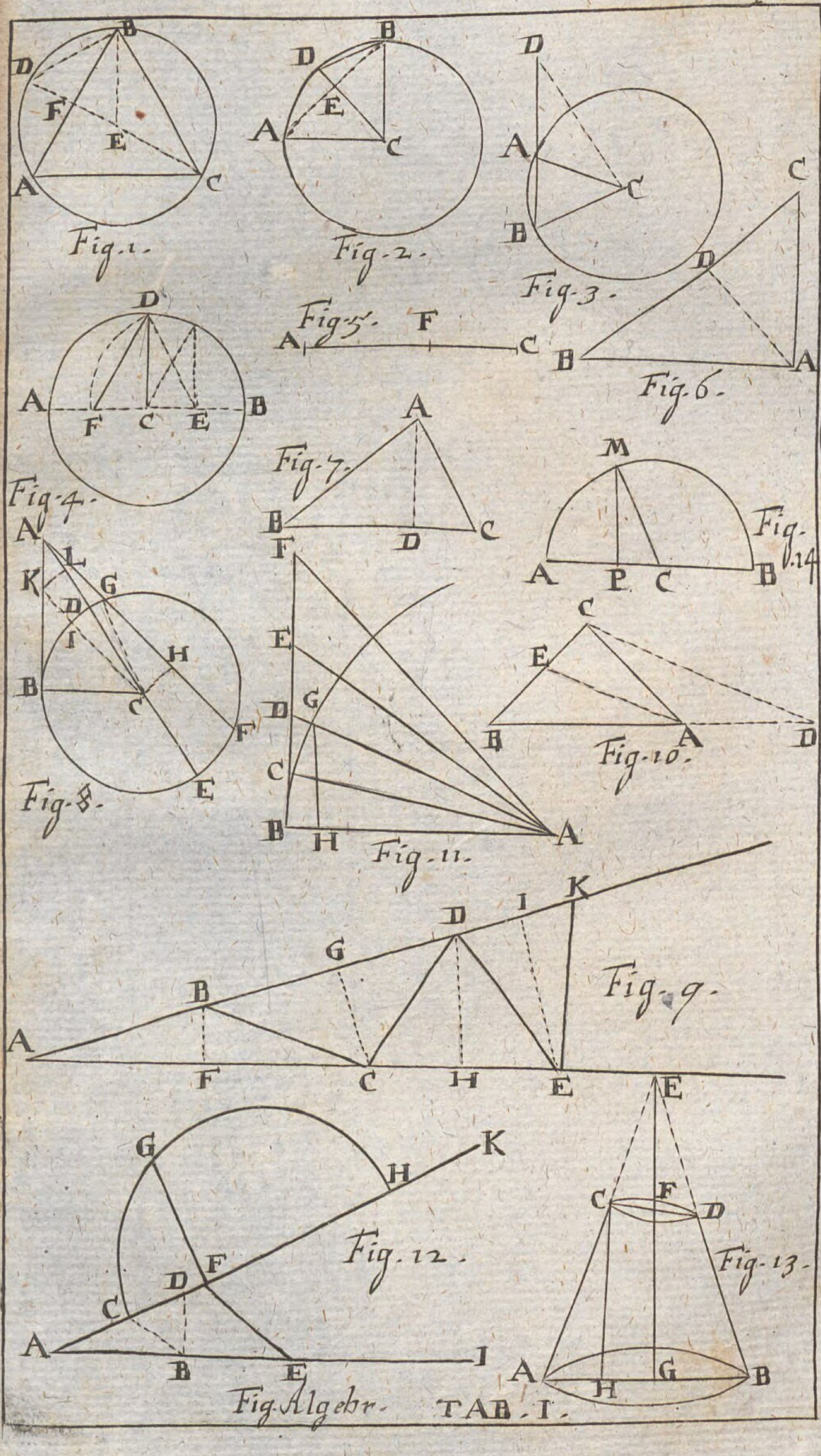


Fig.32.

Fig. Algebr.

TAB. III


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14
Fig. Algebr.
TAB. I.

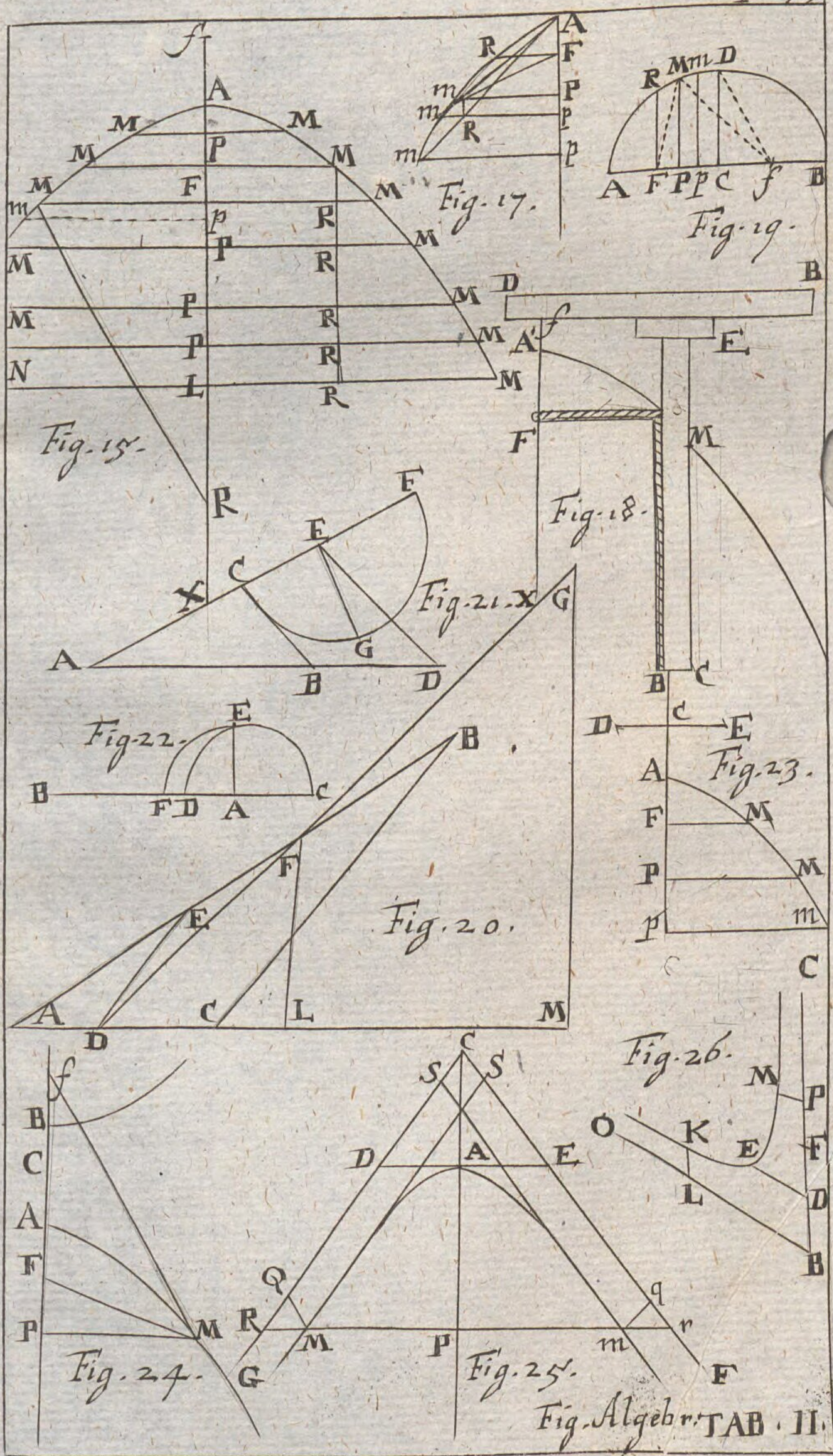


Fig. Algebr. TAB. II.

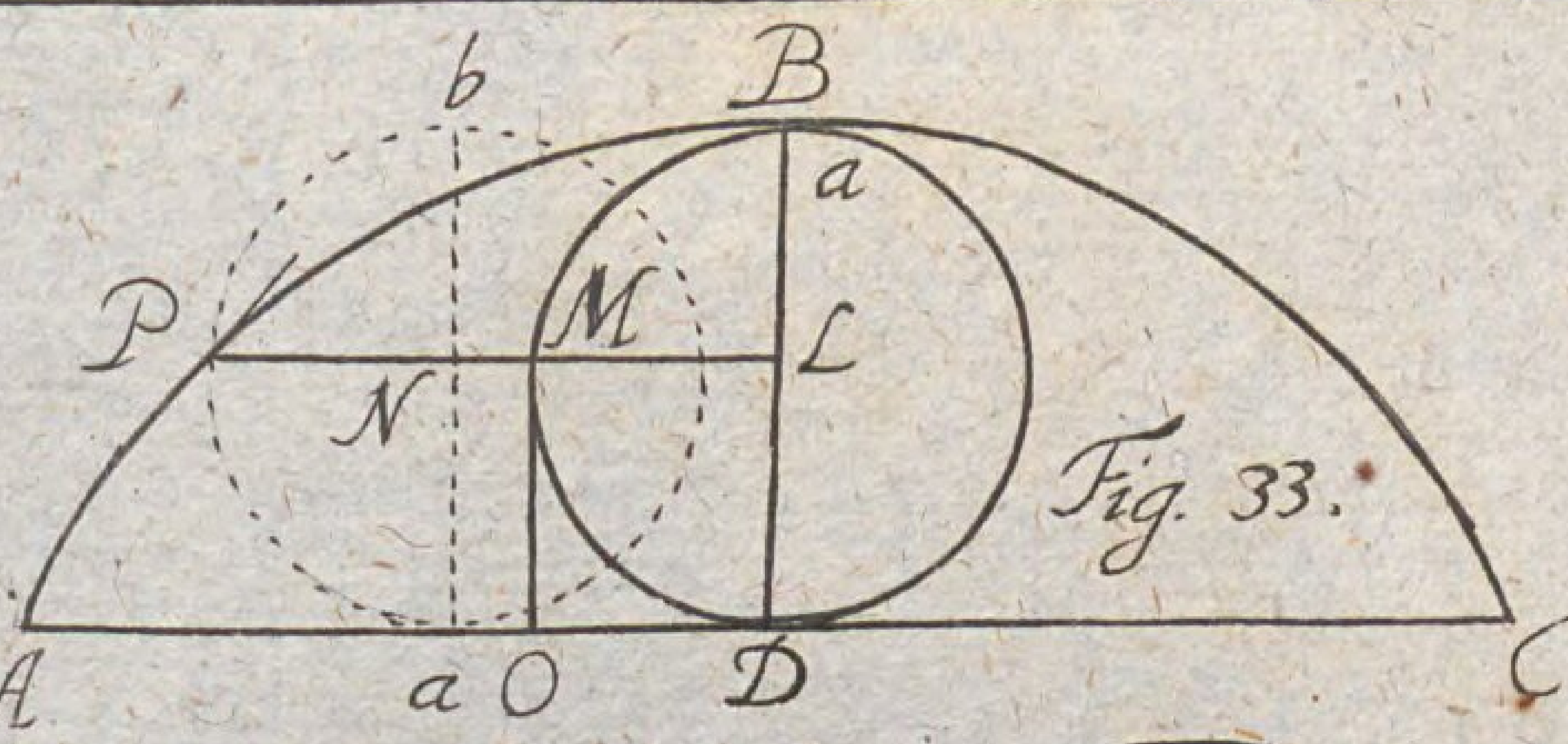


Fig. 33.

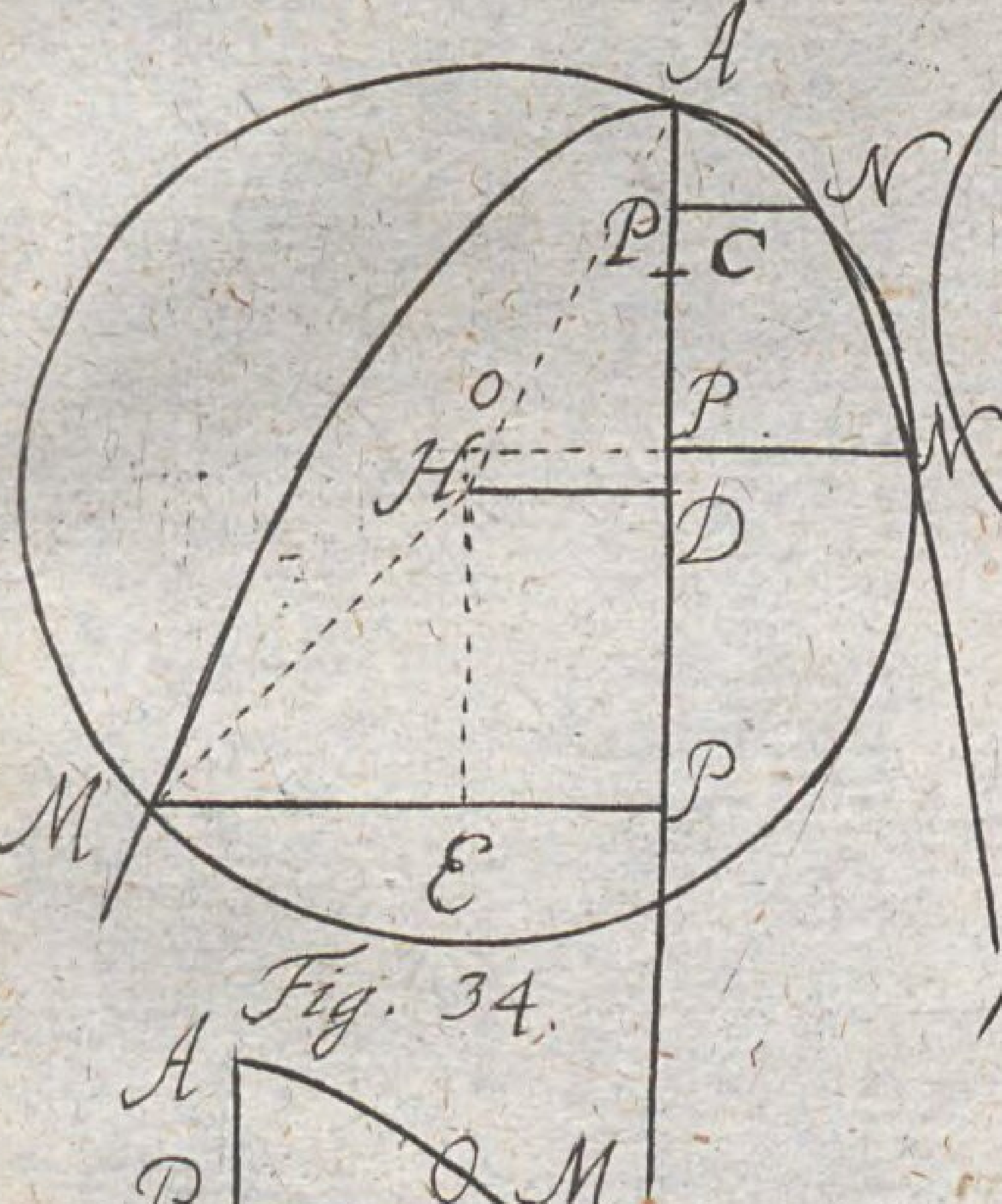


Fig. 34.

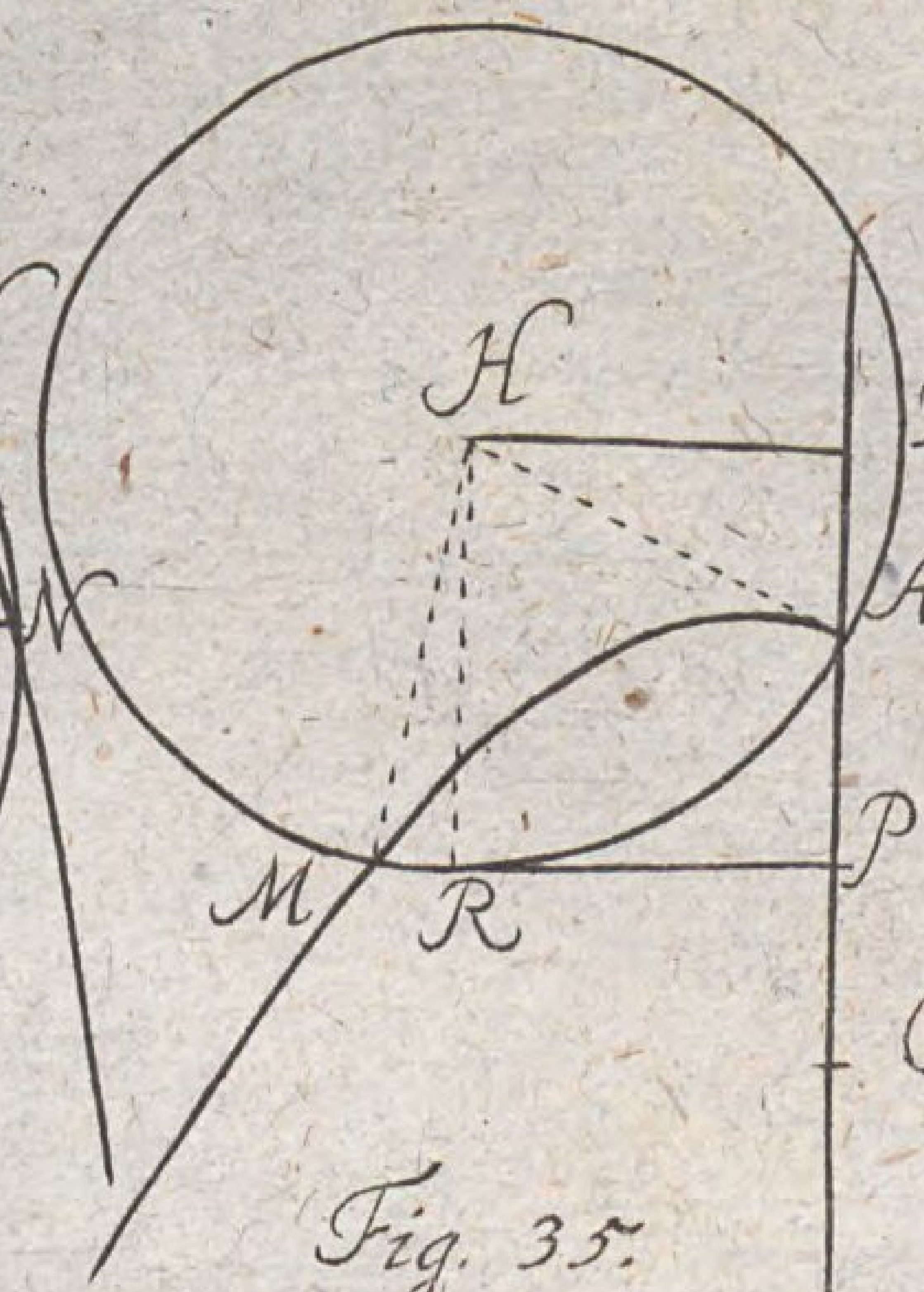


Fig. 35.

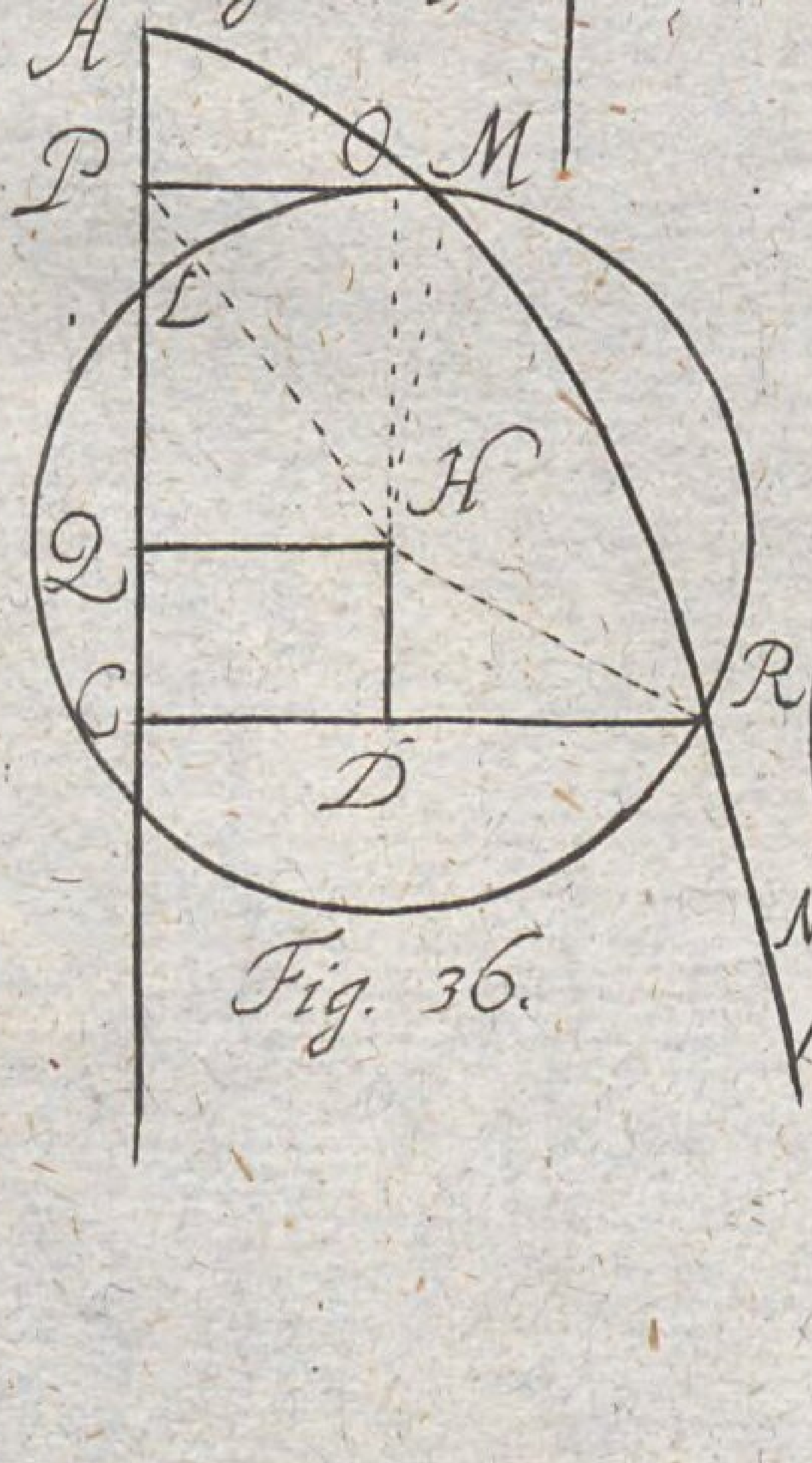


Fig. 36.

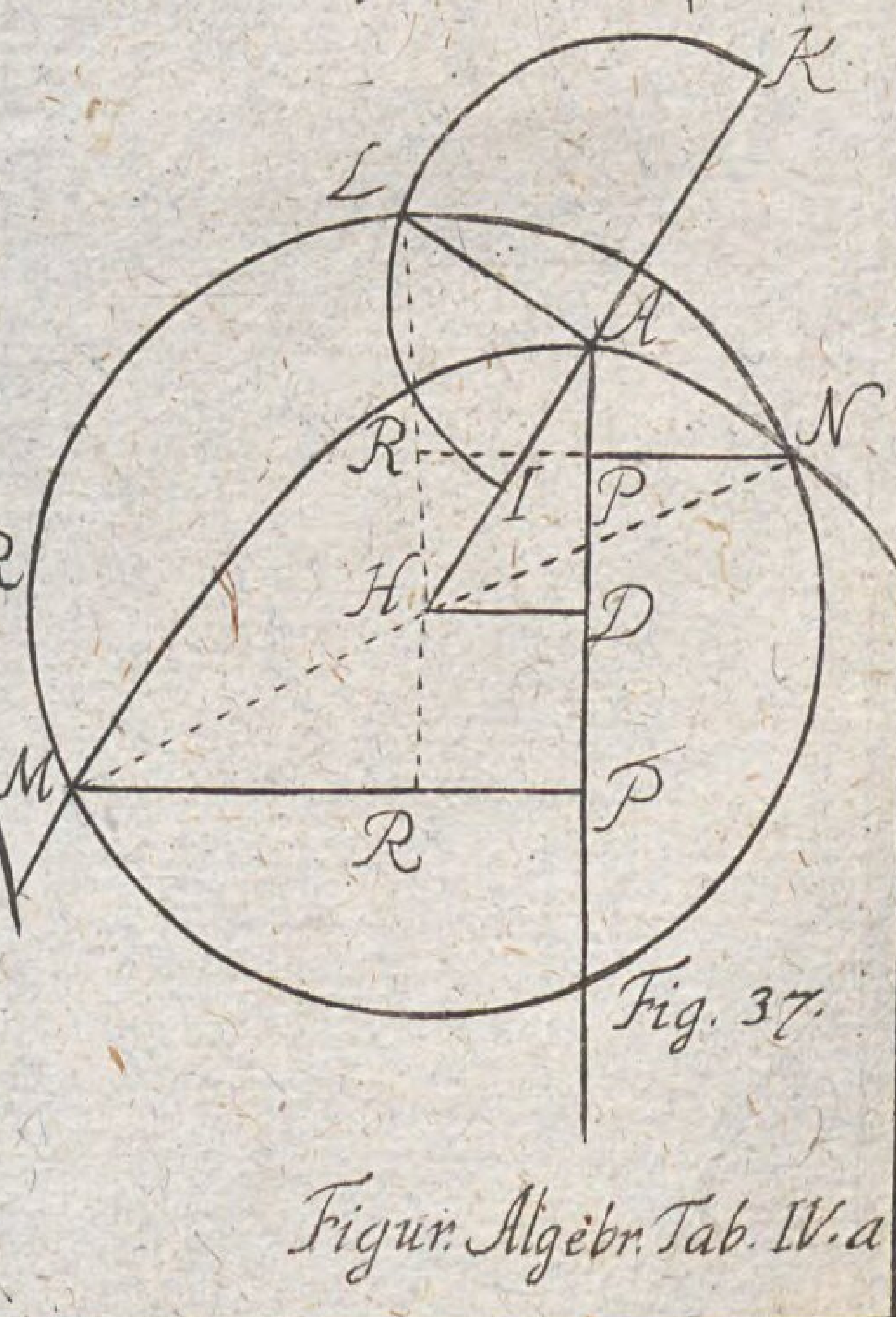


Fig. 37.

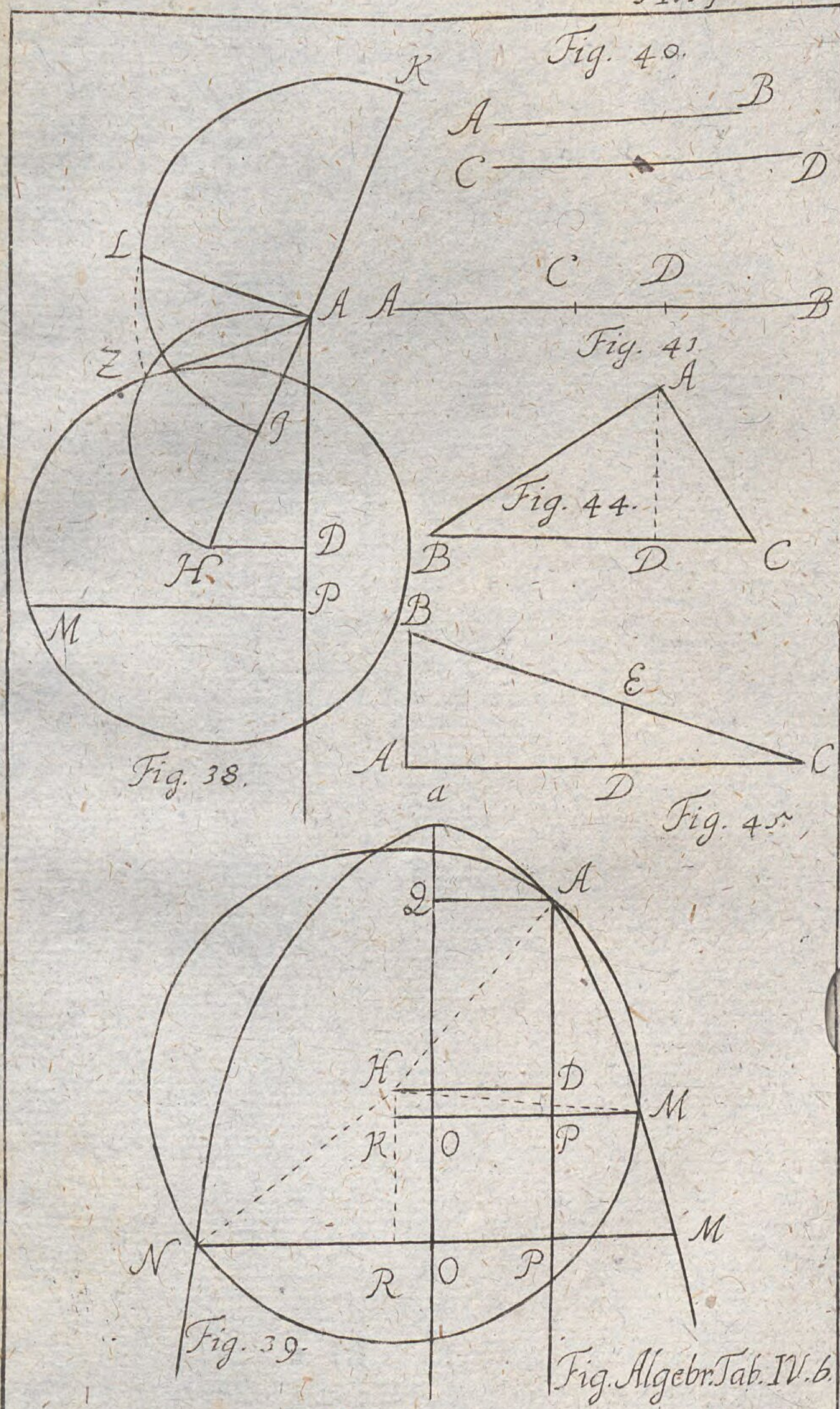


Fig. 40.

Fig. 41.

Fig. 44.

Fig. 38.

Fig. 45.

Fig. 39.

Fig. Algebr. Tab. IV. 6.

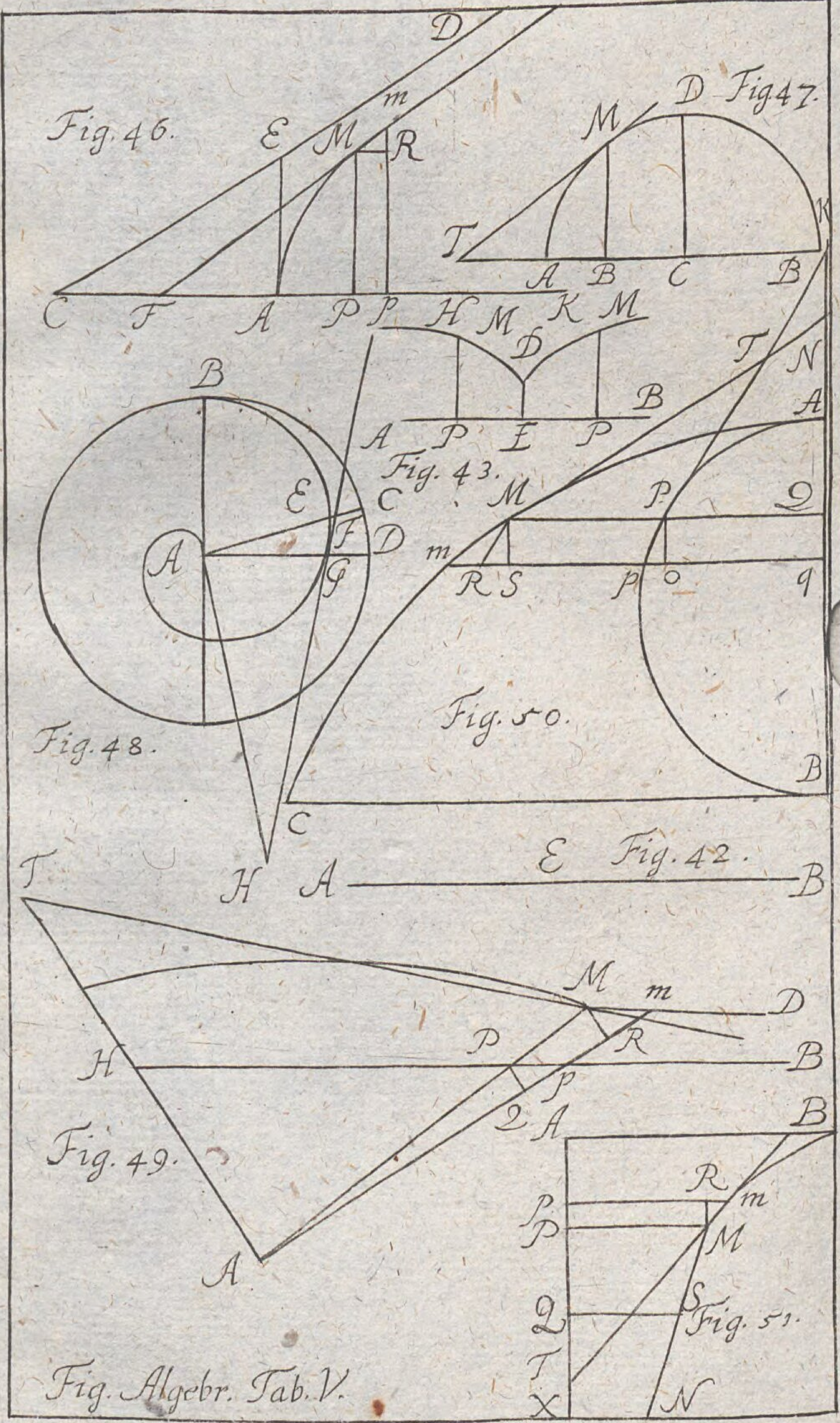


Fig. Algebr. Tab. V.

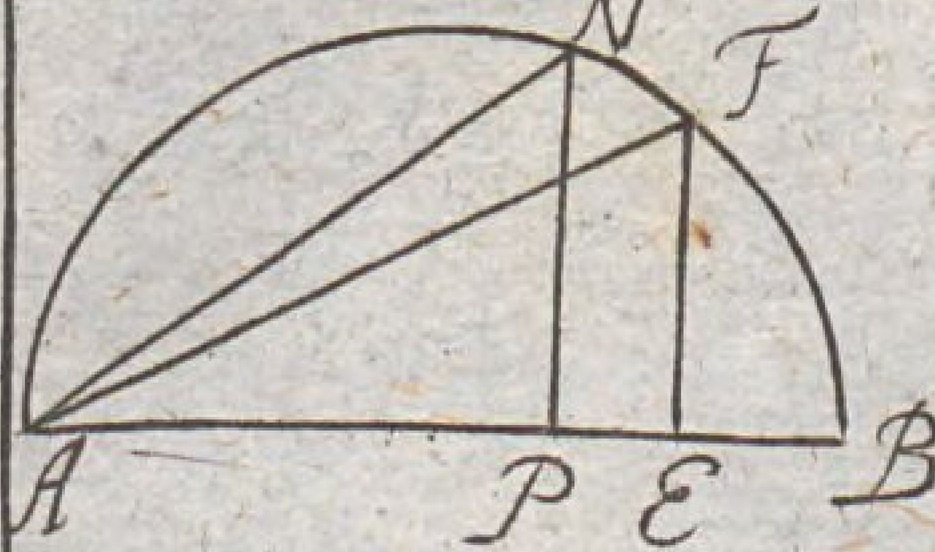


Fig. 50.

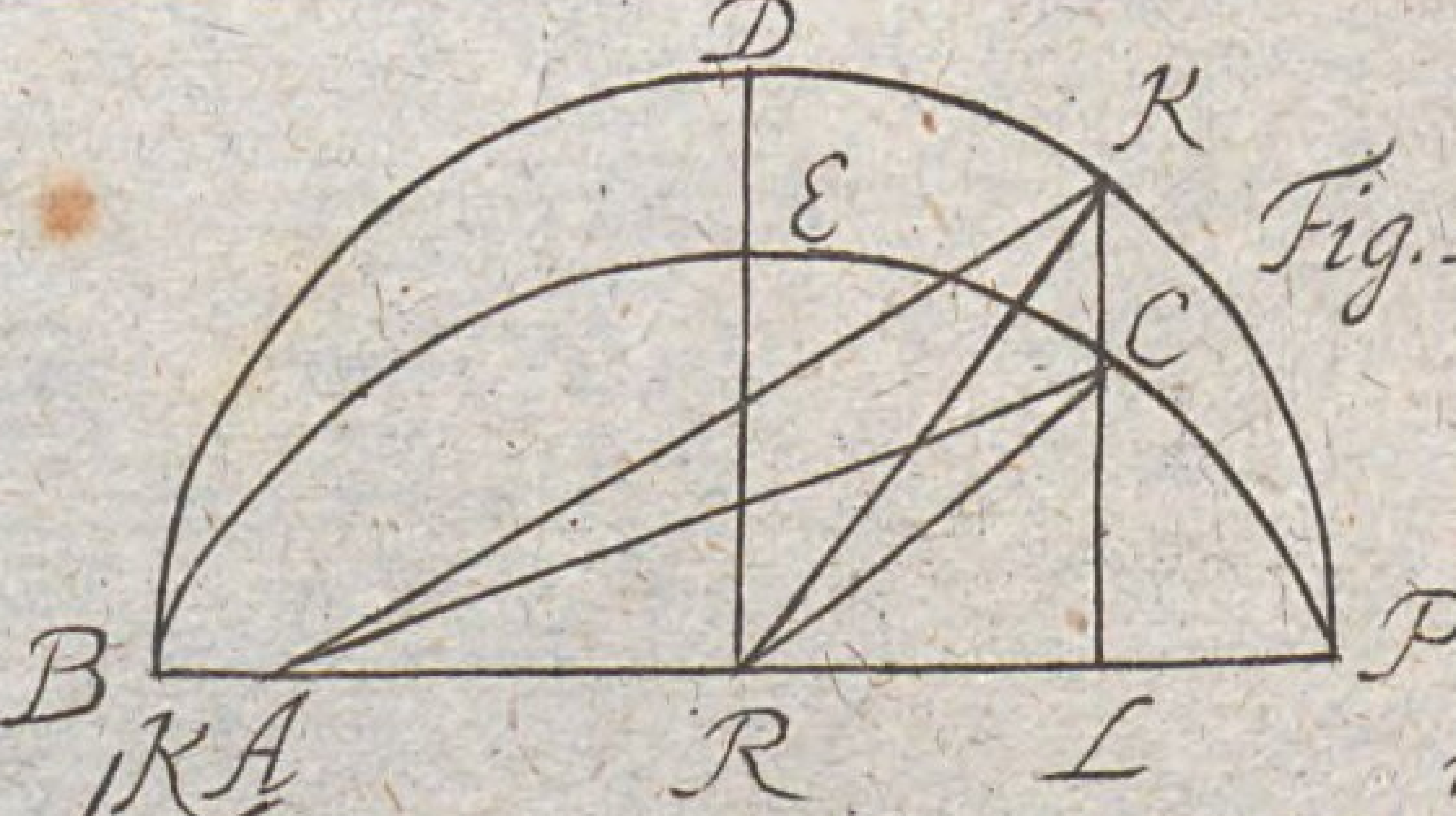


Fig. 51.

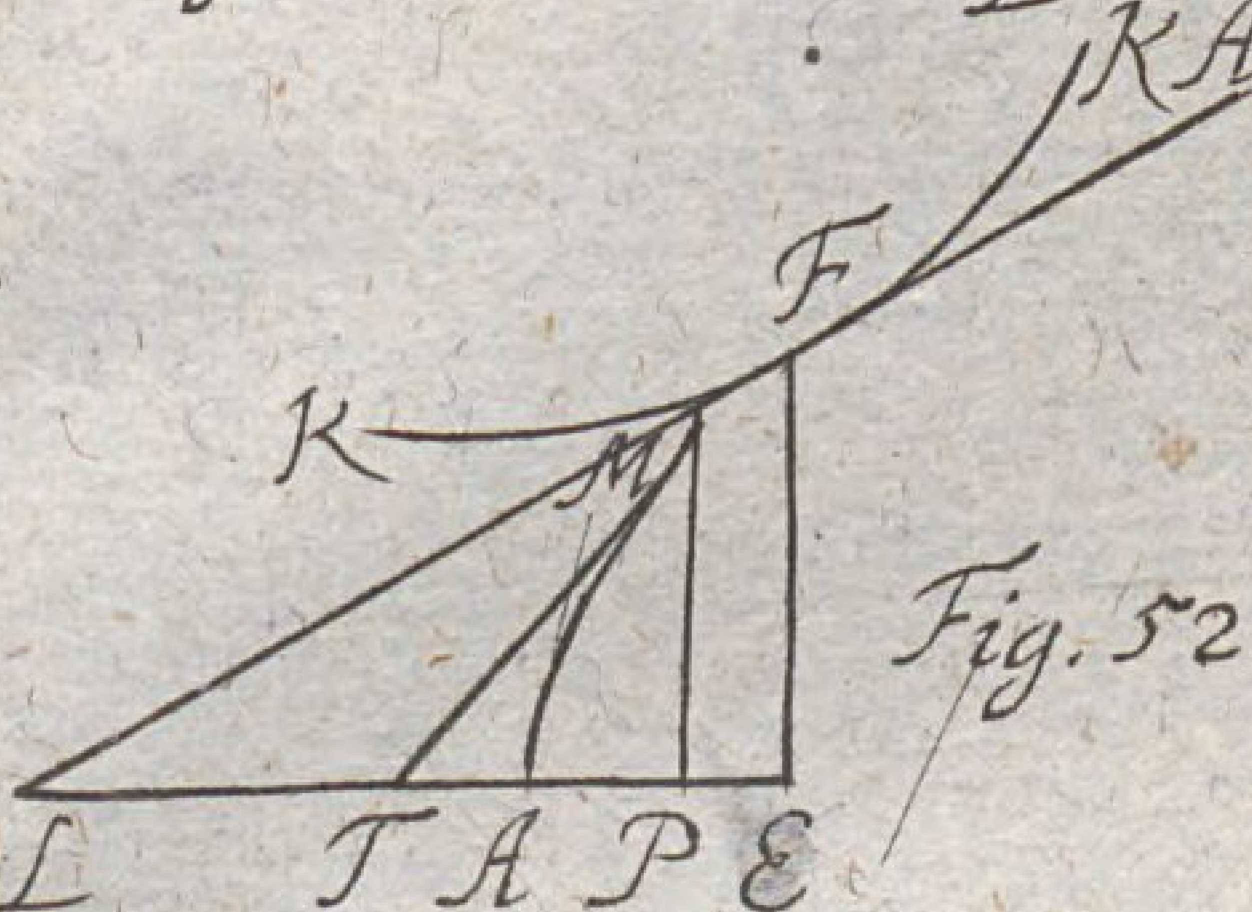


Fig. 52.

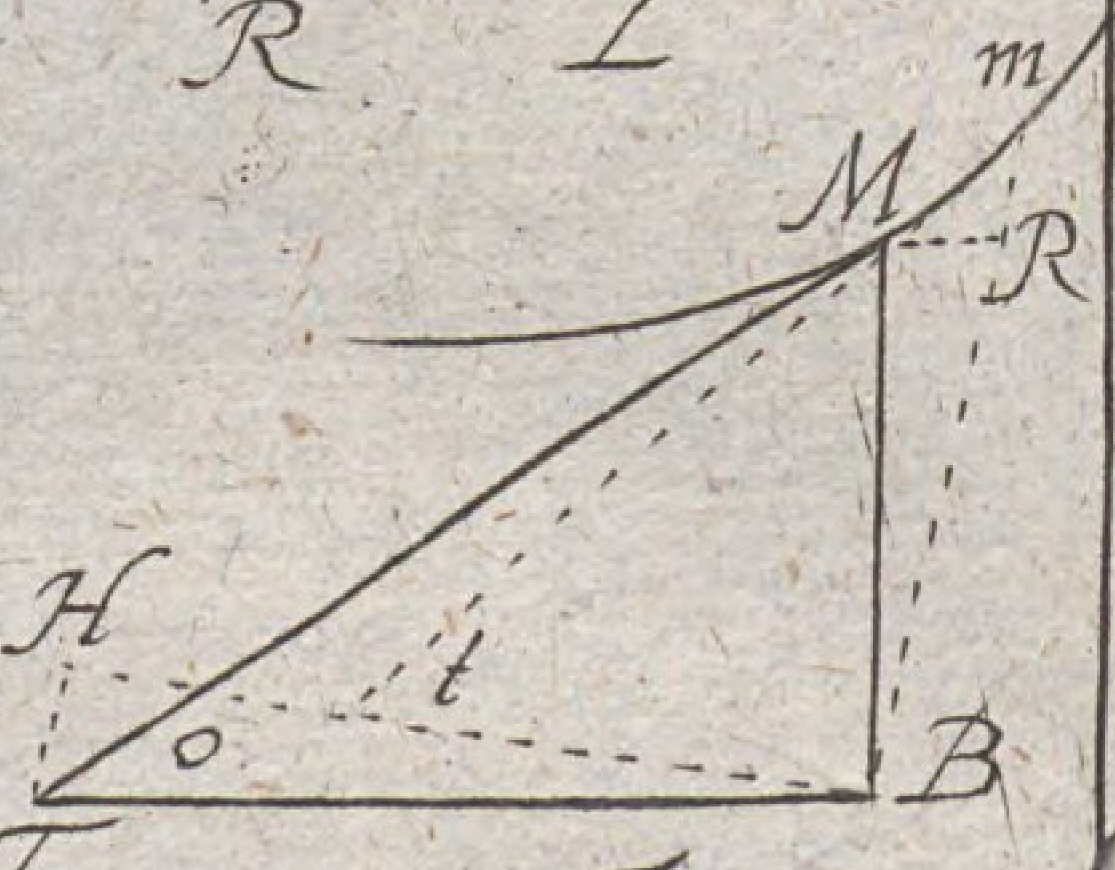


Fig. 53.

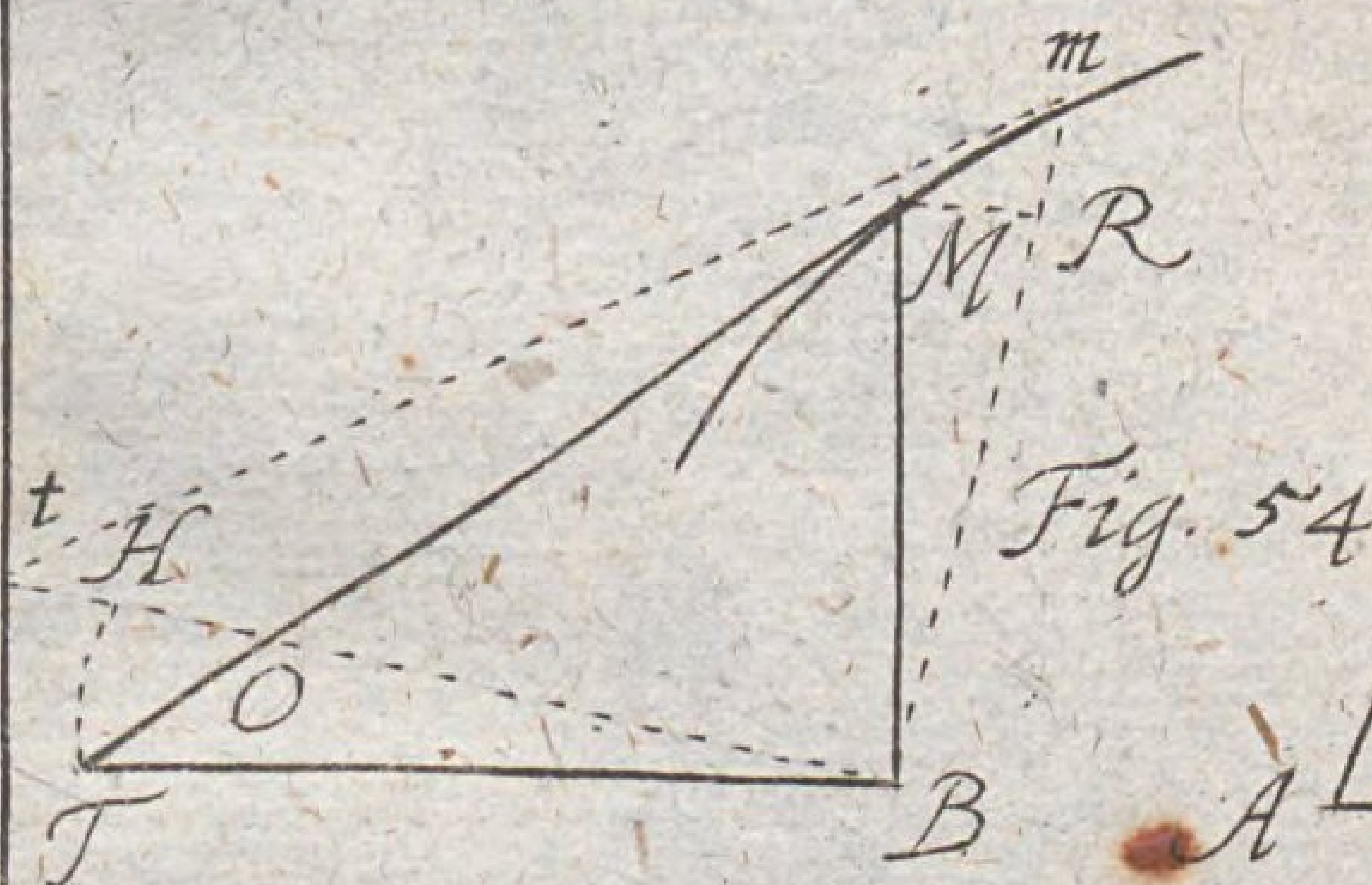


Fig. 54.

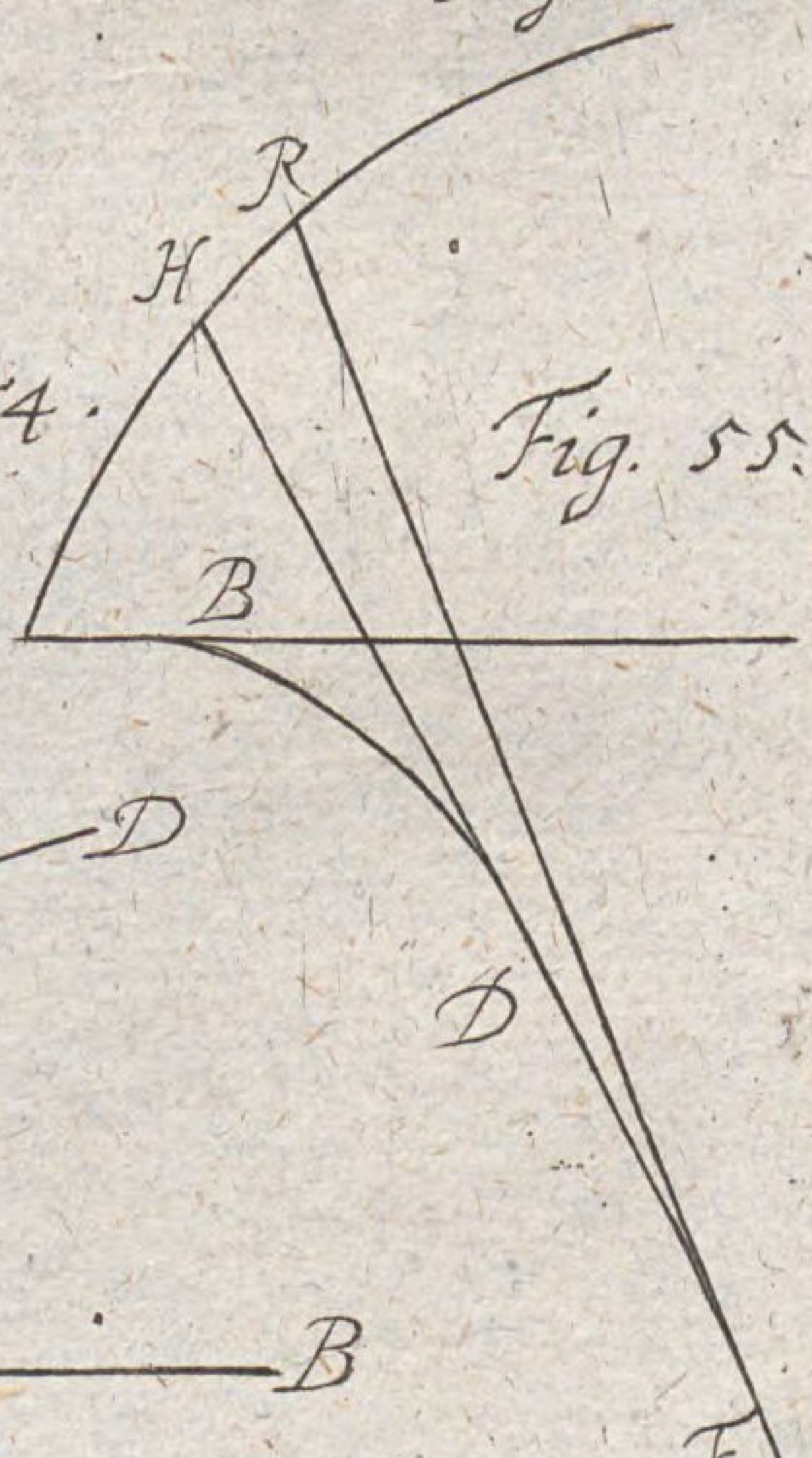


Fig. 55.

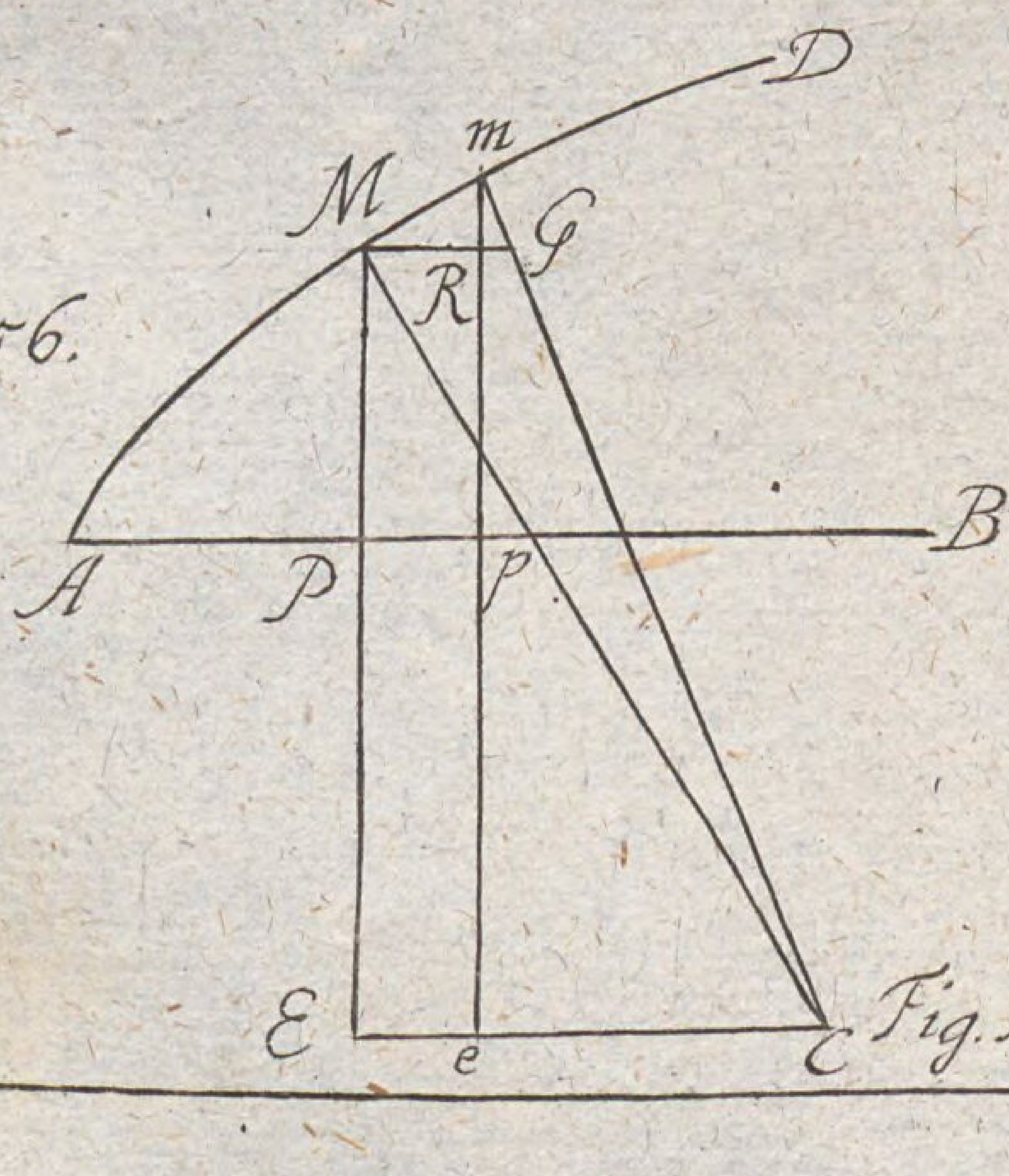


Fig. 56.

Fig. Algebr. Tab. VI.

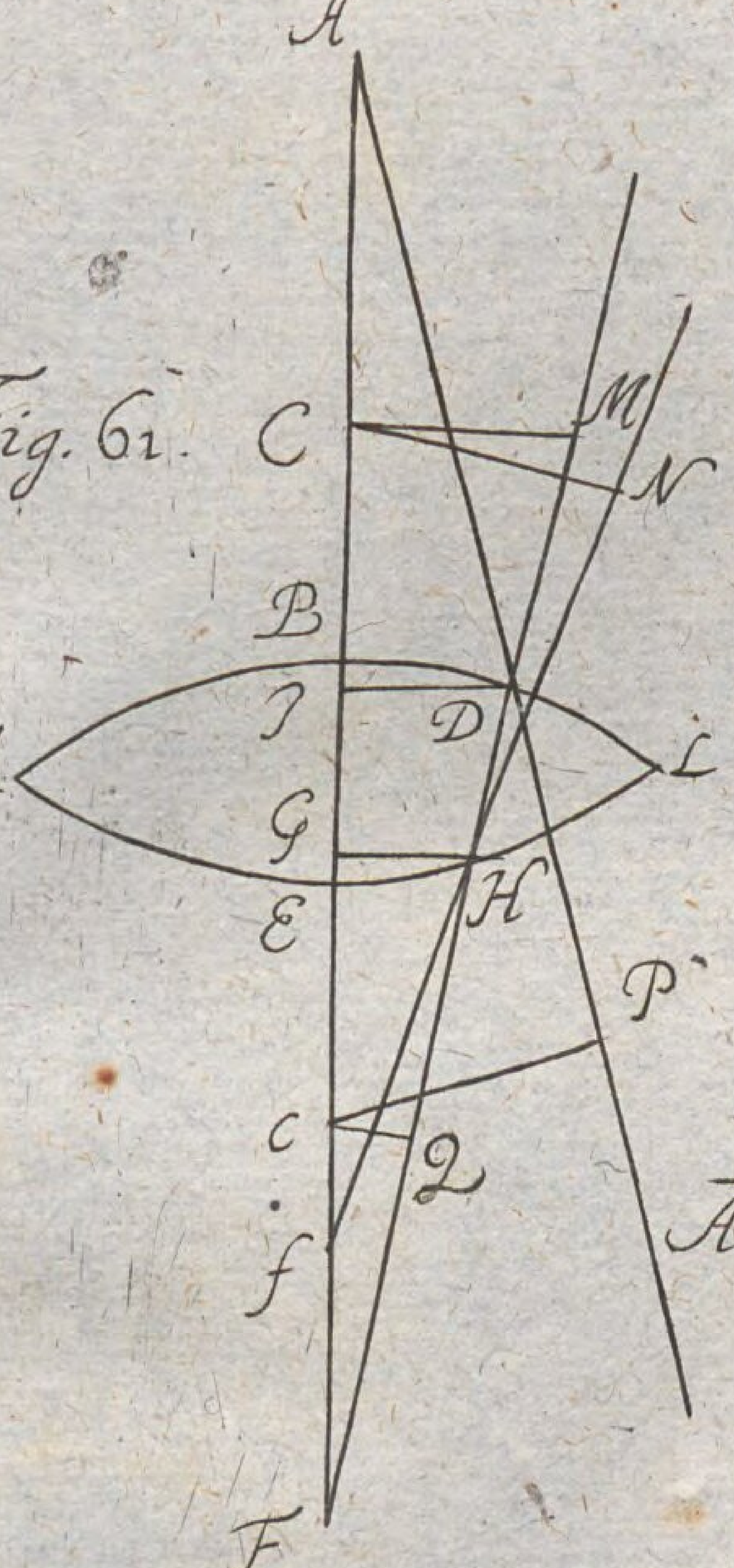


Fig. 61.

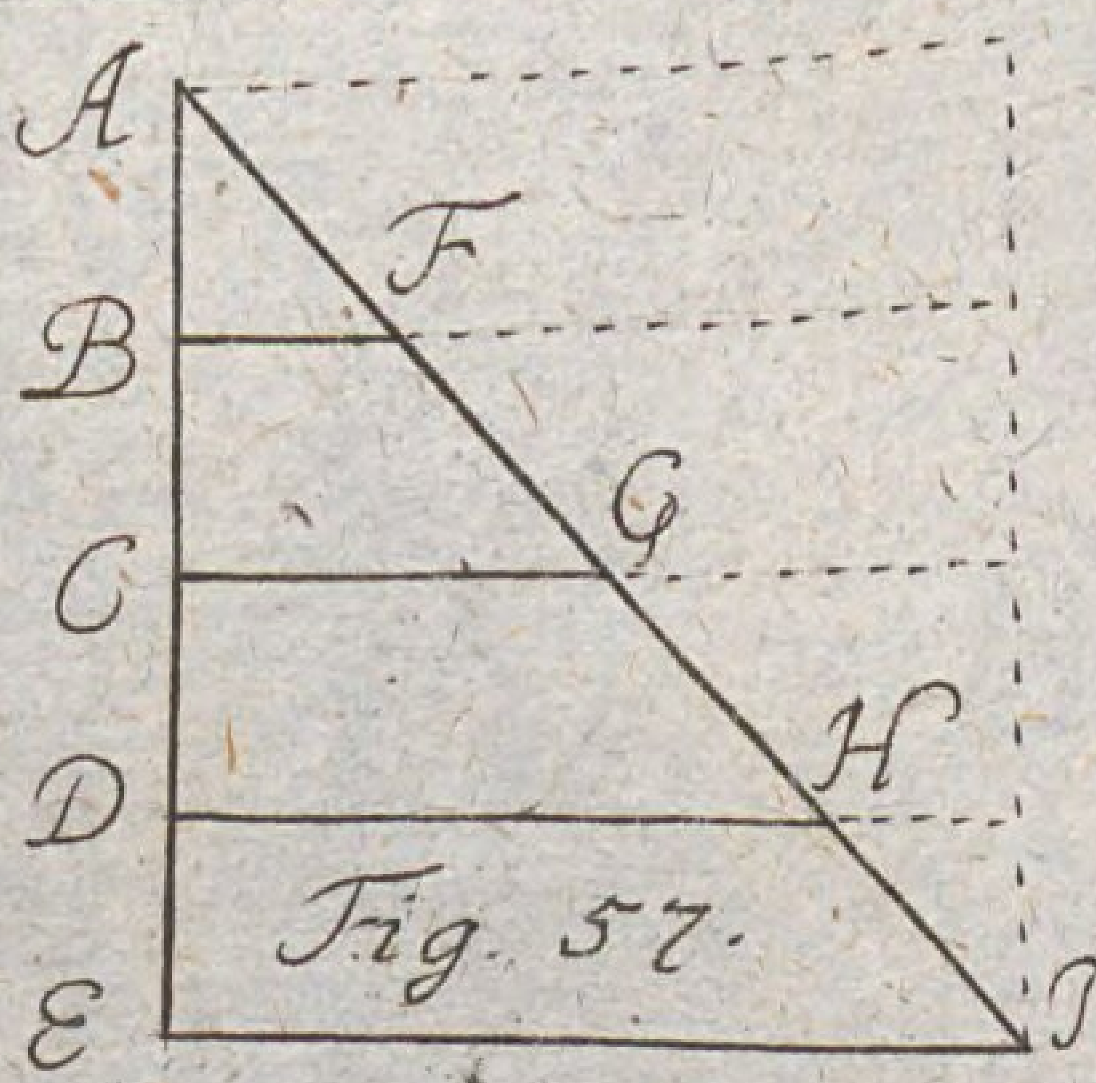


Fig. 57.

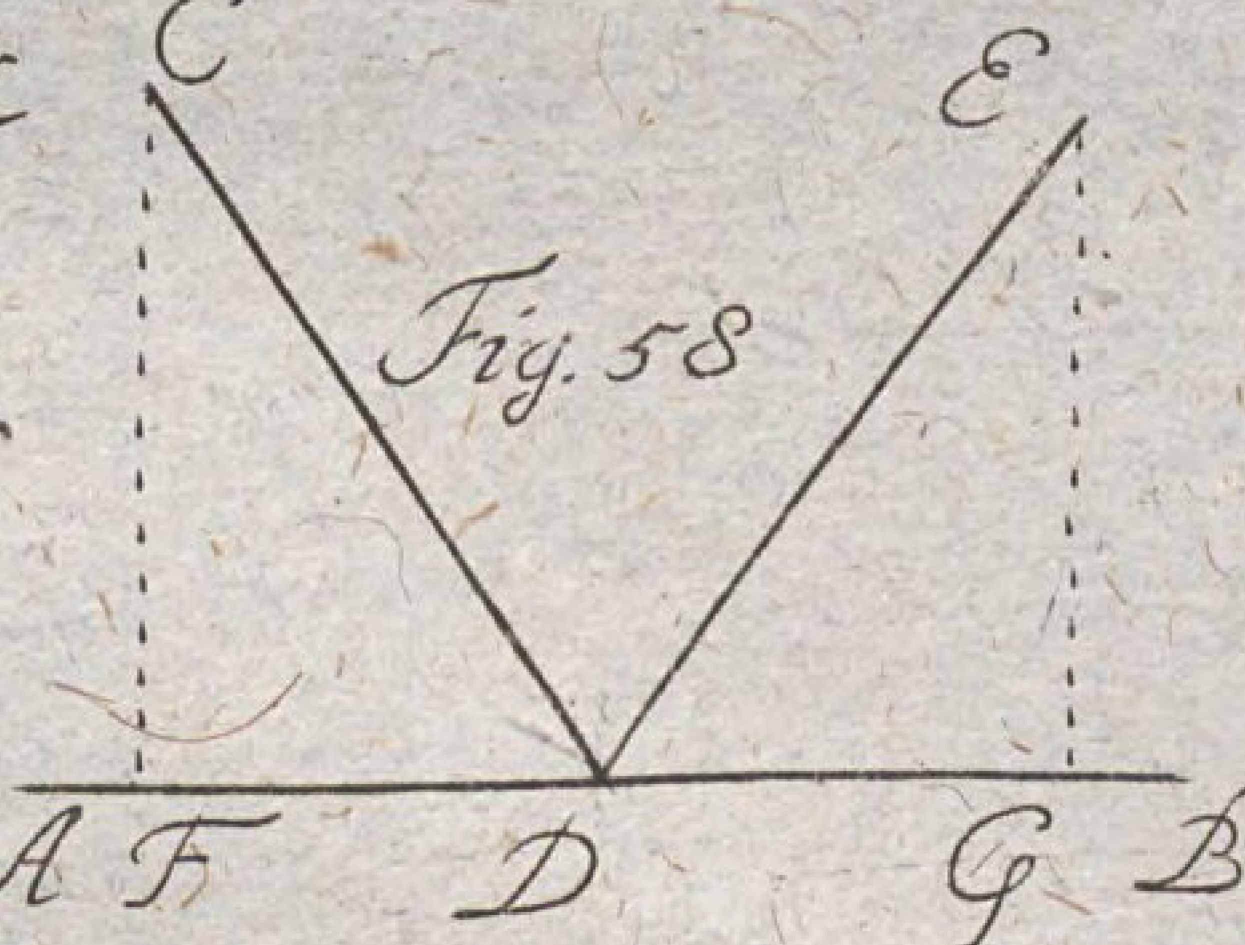


Fig. 58.

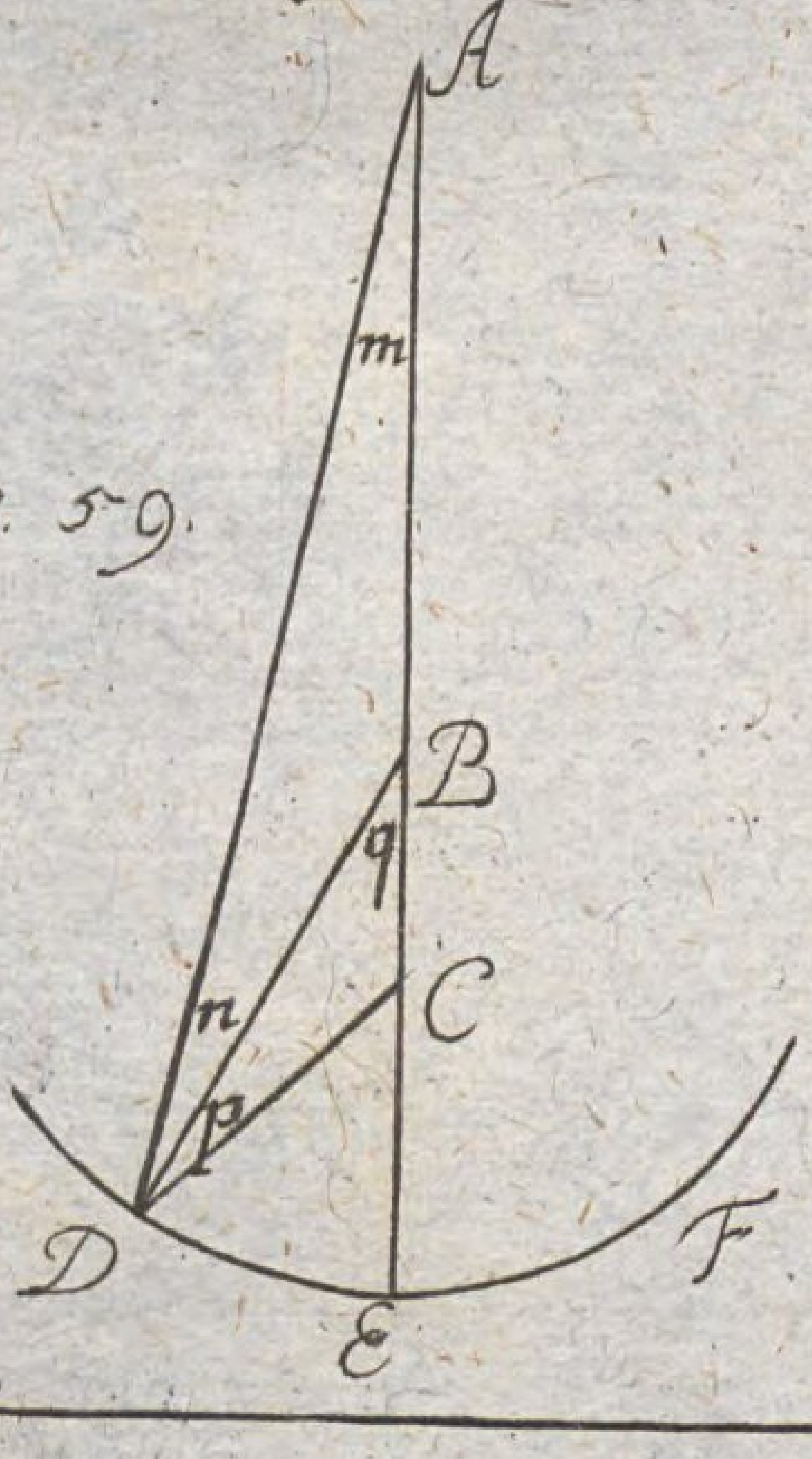


Fig. 59.

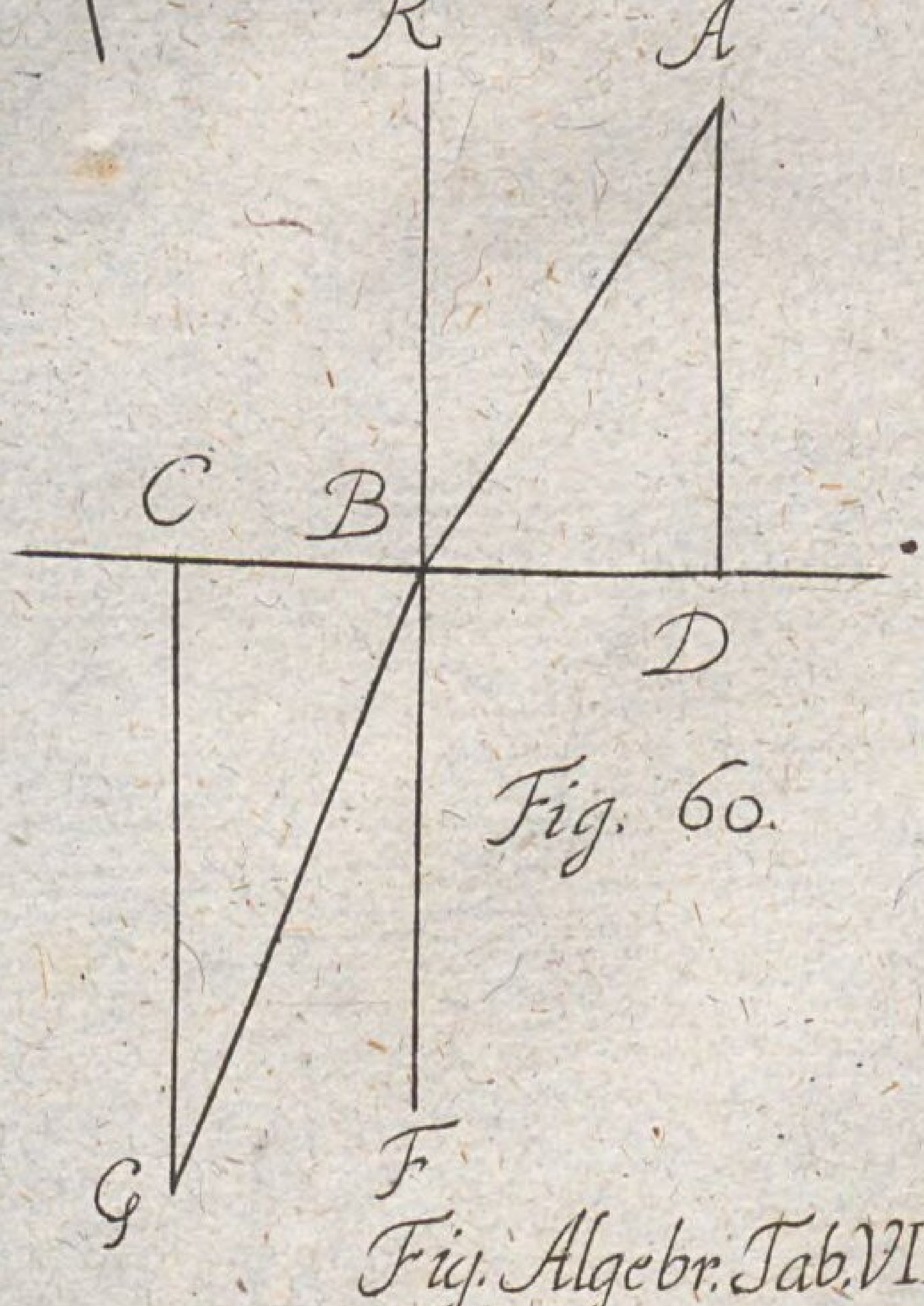


Fig. 60.

Fig. Algebr. Tab.VII.

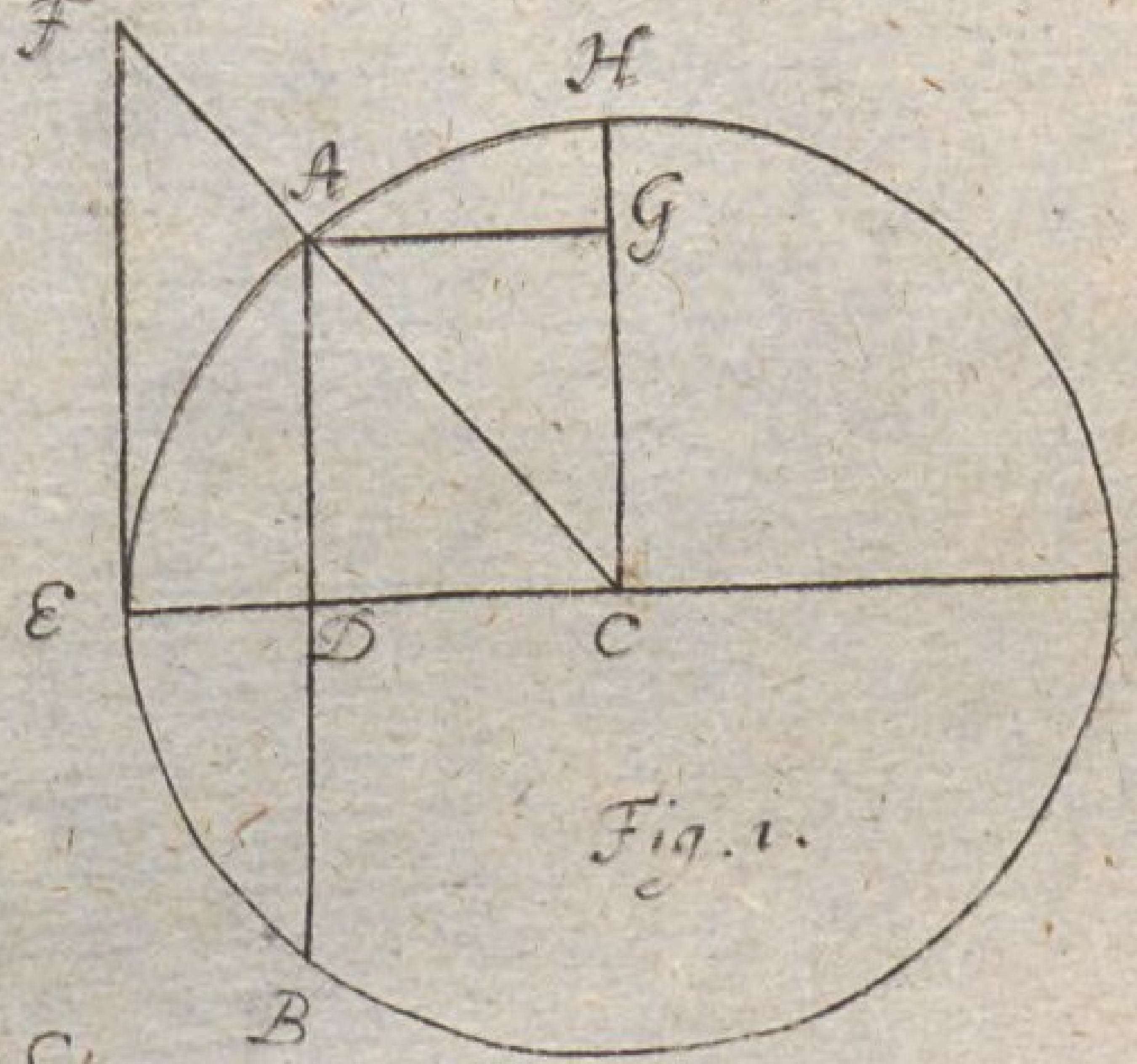


Fig. 1.

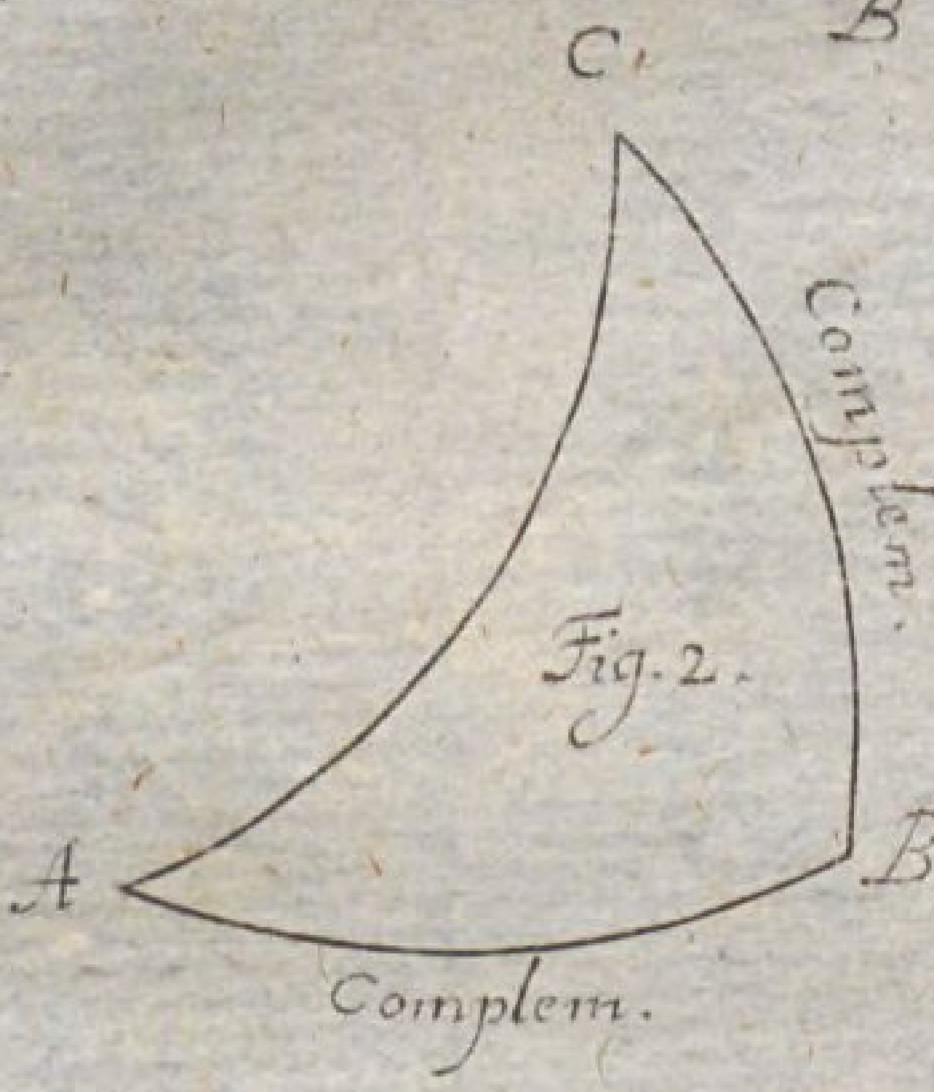


Fig. 2.

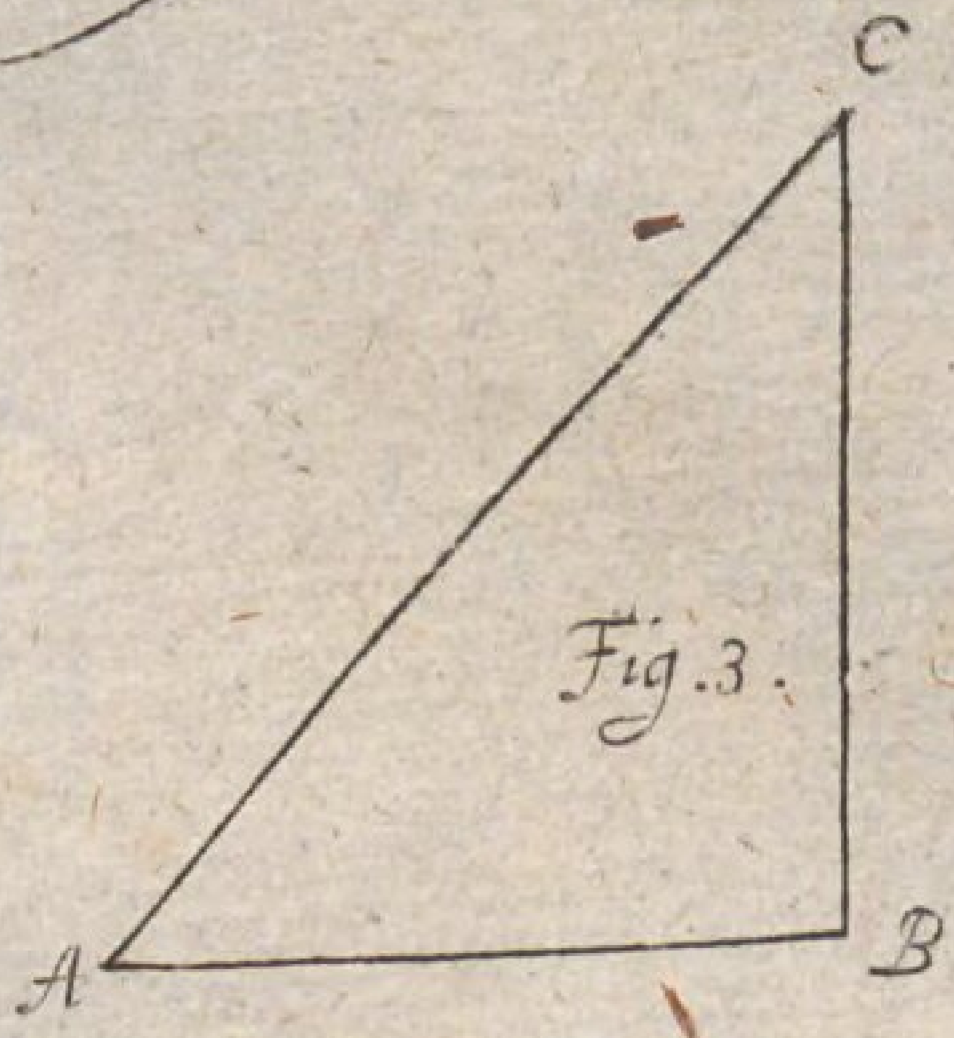


Fig. 3.

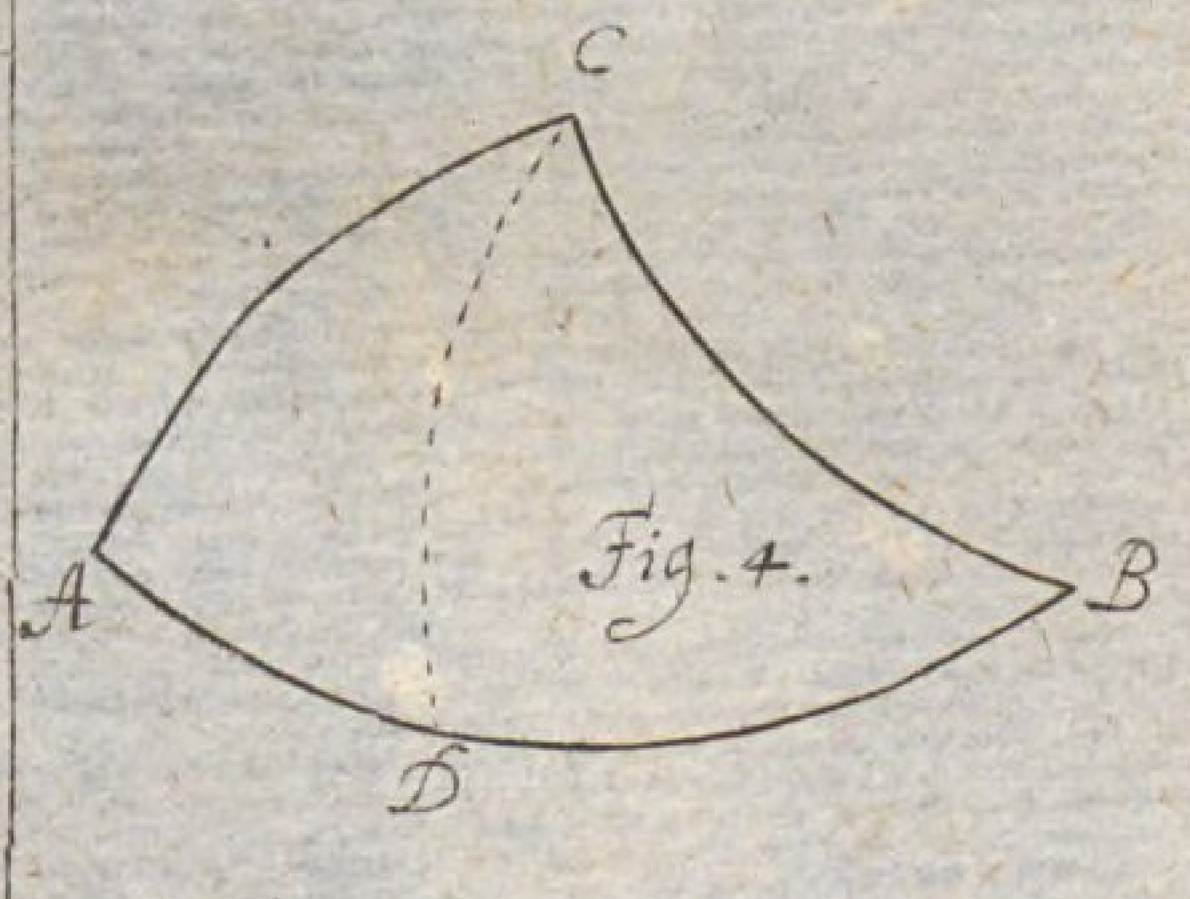


Fig. 4.

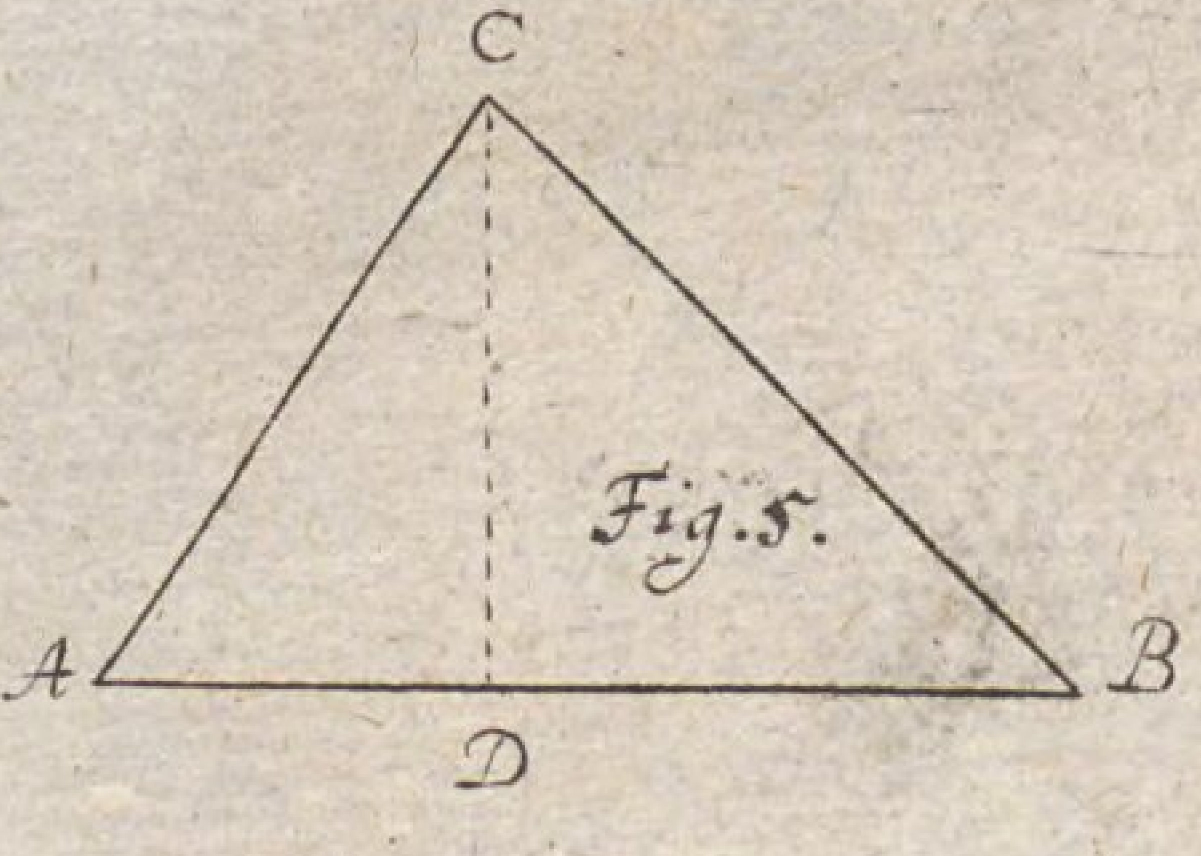


Fig. 5.

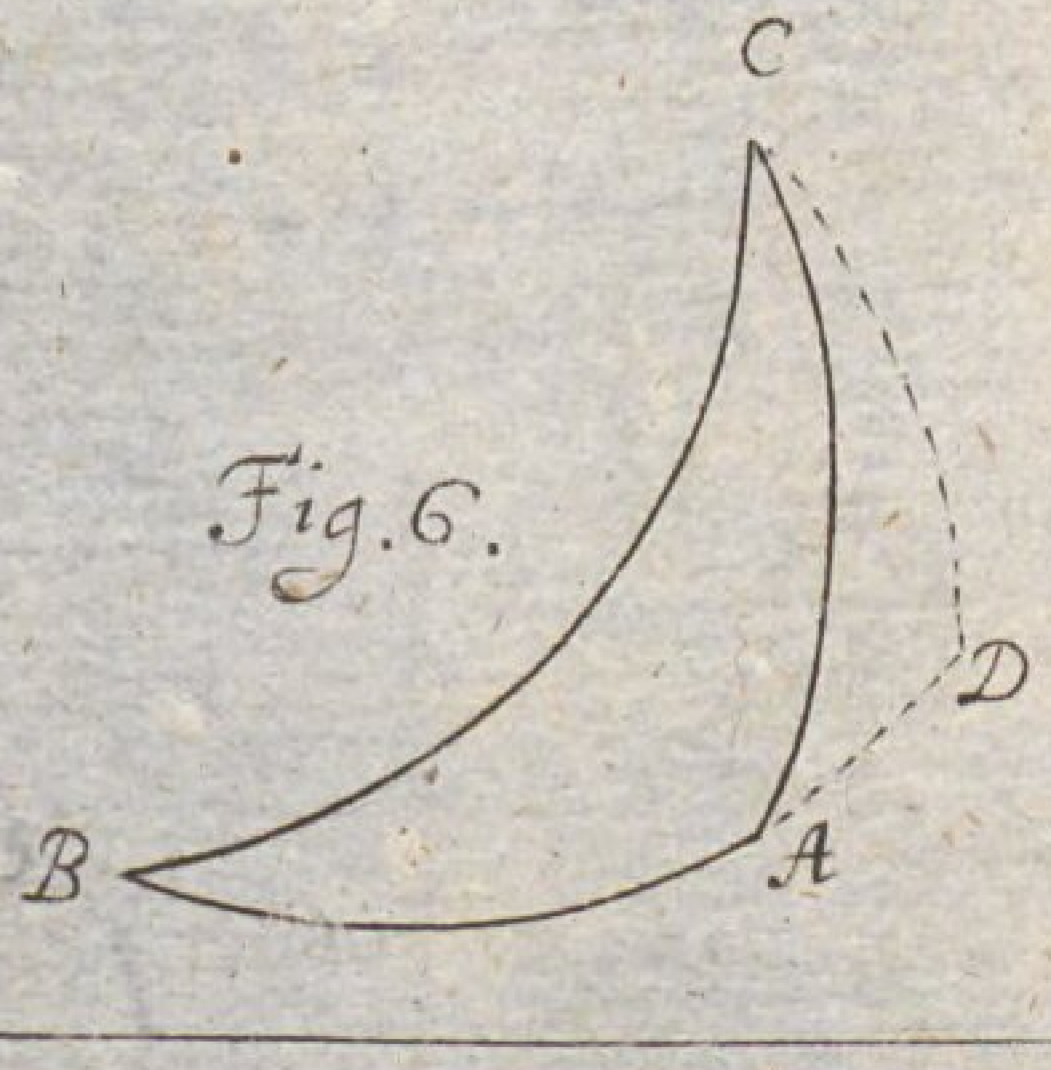


Fig. 6.

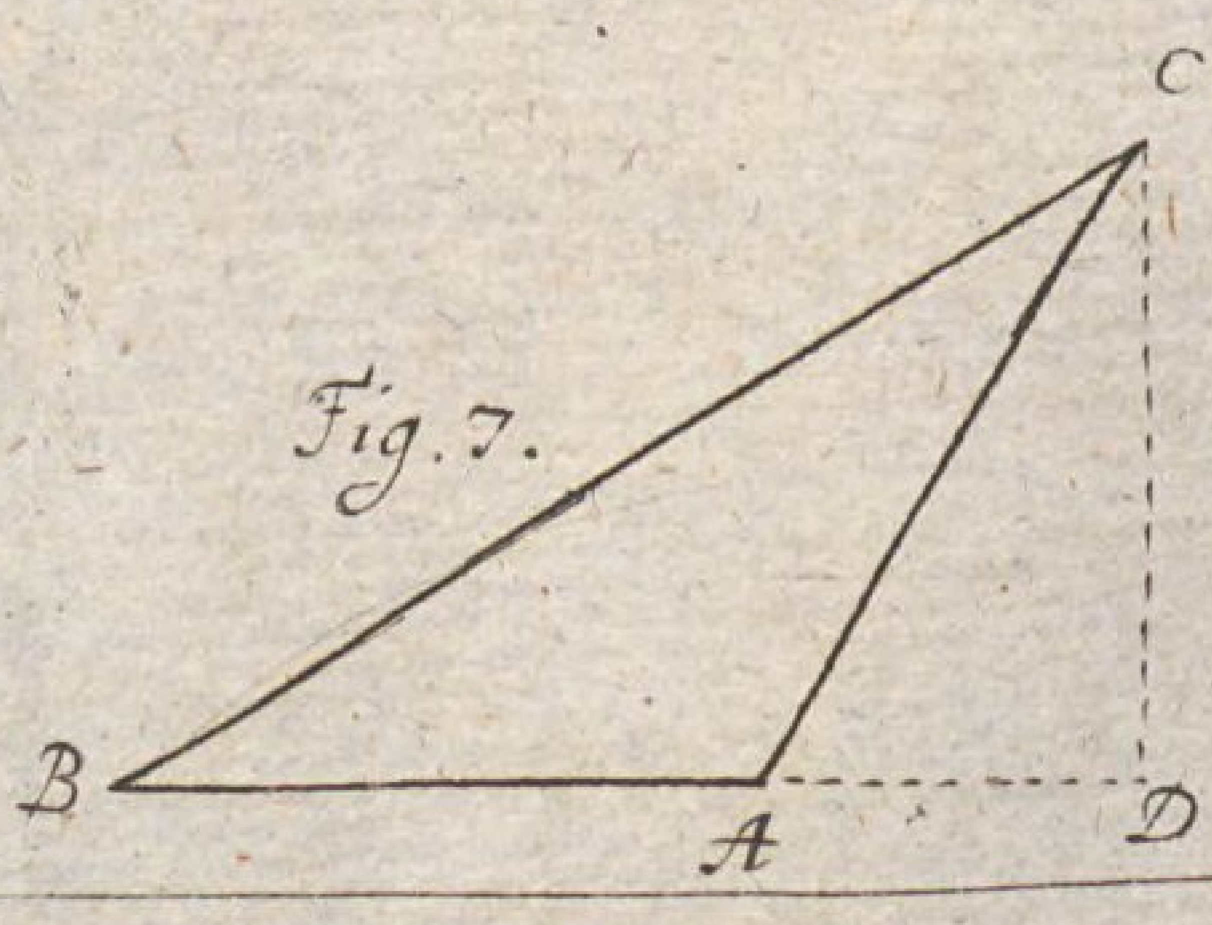


Fig. 7.

Wolff, Christian von, 1679-1754

Der Anfangs-Gründe Aller Mathematischen Wiessenschaften ... Theil und zu mehrerem Aufnehmen der Mathematick so wol auf hohen als niedrigen Schulen aufgesetzet worden
Bd.: X[4]

Halle im Magdeburgischen MDCC